الفصل الاول

مفاهيم أساسية في الحركة الموجية

وسائل انتقال الحركة :

تنتقل الطاقة في الطبيعة من موقع لأخر بطريقتين : الأولى بواسطة انتقال المادة والثانية بواسطة انتقال الموجات او ((الحركة الموجية))

في الطريقة الأولى تنتقل الطاقة من مكان لأخر مع انتقال المادة أي يصاحب انتقال الطاقة انتقال في الكتلة .

اما الطريقة الثانية تنتقل الطاقة من موقع الى اخر بواسطة الموجة دون ان يصاحب انتقالها أي انتقال في الكتلة.

ويمكن للموجة ان تنتقل في وسط مادي او بدون وسط مادي وذلك حسب طبيعة الموجة.

من اهم الأمثلة على الموجات التي تنتقل في الوسط المادي هي موجات الصوت في الهواء والموجات على سطح الماء وهذه الموجات لا يمكن ان تنتقل في الفراغ مطلقا

اما الموجات التي تنتقل في الفراغ هي الموجات الكهرومغناطيسية ومنها الموجات الضوئية.

ماهي الحركة الموجية ؟

الحركة الموجية هي شكل من الاضطراب ينتقل من نقطة الى أخرى عبر وسط مادي او في الفراغ . (الاضطراب هو نمط لحالة فيزيائية يولدها مصدر متحرك) فمثلا الشوكة الرنانة المهتزة تولد اضطرابا في الهواء المحيط بها يكون نمطه على شكل تضاغط وتخلخل وهذه الحالة الفيزيائية المتولدة في نقطة في الهواء تنتقل الى نقاط أخرى دون انتقال جزيئات الهواء من مواضع توازنها والوتر المشدود مثال اخر على نمط الاضطراب .

أنواع الحركة الموجية:- يمكن تقسيم الحركة الموجية الى ثلاث أنواع رئيسية هي :

1- الحركة الموجية الميكانيكية :- هي تلك الحركة التي تحتاج بالضرورة الى وسط مادي لانتقالها وقد يكون هذا الوسط المادي صلبا او مائعا والامثلة على هذه الموجات الصوتية والموجات على سطح الماء والموجات الزلزالية والموجات في الاسلاك والقضبان المعدنية والموجات في الاوتار المهتزة والموجات في الاغشية والرقائق المهتزة والموجات في هياكل الأبنية والمكائن....

2- الحركة الموجية الكهرومغناطيسية :- هي تلك التي لا تحتاج بالضرورة الى وسط مادي لانتقالها فهي تنتقل في الفراغ كما تنتقل في بعض الأوساط المادية مثل جميع أمواج الطيف الكهرومغناطيسي كموجات الراديو والتلفزيون والرادار والموجات الدقيقة والموجات تحت الحمراء والضوء وموجات الاشعة فوق البنفسجية ....

3- الحركة الموجية المادية:- هي الصفة الموجية المصاحبة لحركة الجسيمات المادية .فقد دلت الدراسات على حيود الالكترونات ان الجسيم المتحرك يقرن بموجة .فالجسيم الذي كتلته m والمتحرك بسرعة u يكون مقرونا بموجة طولها الموجي λ وهو

$$\lambda = \frac{h}{mu}$$

h ثابت بلانك ويساوي 6.626×10^{34} J/s

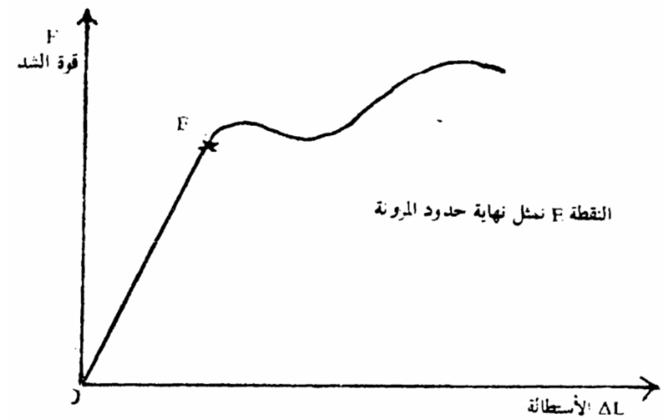
في هذا الفصل سوف يتم التركيز على الحركة الموجية الميكانيكية فقط التي يشكل الصوت أحد اهم اشكالها

<u>الخواص الأساسية لانتقال الحركة الموجية الميكانيكية :-</u>

ان انتقال الحركة الموجية في أي وسط مادي يعزى الى خاصيتين أساسيتين لذلك الوسط هما خاصيتا المرونة والقصور الذاتي

1- **خاصية المرونة :** ان المقصود بمرونة الوسط هي خاصيته على مقاومة أي تشوه فيه وقابليته على استعادة شكله او حجمه او وضعه بعد زوال القوة المشوه المؤثرة عليه والقانون الذي يتحكم في سلوك المواد هو قانون هوك . قانون هوك يشير الى ان أي قوة خارجية تسلط على جسم ما تحدث فيه تشويها يؤدي الى تغيير حالته (الشكل والحجم او كليهما)
كمثال التشويه الذي يحصل على سلك بعد سحبه واستطالته بتأثير قوة شد. هذه الاستطالة تحدث بسبب تباعد الجزيئات عن بعضها البعض في نفس اتجاه القوة . وفي نفس الوقت فان مساحة المقطع العرضي تتغير أيضا وكنتيجة لتأثير قوة الشد الخارجية (القوة المشوهة) فان قوة التماسك بين الجزيئات تحاول إعادة السلك الى وضعه الأصلي ان مقدار الاستطالة الكلية في طول السلك تتناسب طرديا مع قوة الشد وهذه ابسط صيغة لقانون هوك.

اما اذا كانت القوة المشوهة كبيرة وتجاوزت الكثافة الفاصلة بين الجزيئات (حدود المرونة) فان الجزيئات لا تعود الى سابق وضعها بعد زوال القوة المؤثرة .وبذلك يفقد السلك مرونته ولا يستعيد طوله الأصلي .



يمكن التعبير عن قانون هوك بلالة الاجهاد والمطاوعة والذي يعرف بانه القوة المسلطة على وحدة المساحات من السطح المعرض لتلك القوة

$$\text{الاجهاد} = \frac{\text{القوة}}{\text{المساحة}}$$

اما المطاوعة فهي النسبة بين مقدار التشوه في الجسم الذي تسببه القوة المشوه على بعده الأصلي قبل التشوه

$$\text{المطاوعة} = \frac{\text{مقدار التشوه}}{\text{البعد الاصلي}}$$

ان العلاقة بين الاجهاد والمطاوعة ضمن حدود المرونة كالاتي :

المطاوعة $\propto$ الاجهاد

المطاوعة $\times$ ثابت=الاجهاد

ان الثابت هو معامل المرونة وبذلك تكون المناسب لقانون هوك هو

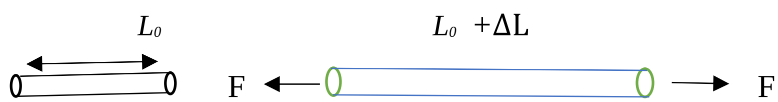
$$\textbf{معامل المرونة} = \frac{\text{الاجهاد}}{\text{المطاوعة}}$$

هناك ثلاث أنواع مختلفة لمعامل المرونة كل منها يعتمد على طبيعة المادة والشكل الهندسي ونوع التشوه الذي تحدثه القوة المشوهة وهي :-

أولا: معامل المرونة الخطي
ثانيا: الحجمي
ثالثا: معامل الصلابة

أولا: **معامل المرونة الخطي((معامل يونك Y))**

فلو كان لدينا سلك طوله الأصلي L_0 وتم التأثير عليه بقوة مشوهة هي F لتغير طول السلك بمقدارΔL



المطاوعة الطولية هي $\frac{\Delta L}{L0}$

اما الاجهاد الطولي فهو $\frac{F}{A}$

فان معامل يونك هو النسبة بين الاجهاد الى المطاوعة ضمن حدود المرونة

$$Y = (\frac{F}{A})/(\frac{\Delta L}{L0})$$

ان القوة المشوهة (قوة الشد) تتناسب طرديا مع التشوه الطولي ((الاستطالة)) ΔL

ثانيا :**معامل المرونة الحجمي:-**

هذه المعامل يقابل التشوه الحجمي الذي يحدث في الموائع ((السوائل والغازات)) فاذا كان حجم المائع تحت ضغط معين هو V_0 ثم ازداد الضغط بمقدار ΔP فان حجم المائع سينكمش بمقدار ΔV ان الزيادة بالضغط ΔP تمثل الزيادة بالقوة المسلطة على وحدة المساحة أي انها تساوي $\frac{F}{A}$ حيث F يمثل مقدار الزيادة بالقوة المؤثرة عموديا وبانتظام على كل سطح المائع A لذا فان ΔP يمثل الاجهاد والنسبة بين التغير في الحجم ΔV الى الحجم الأصلي V_0 تمثل المطاوعة الحجمية فاذا رمزنا الى معامل المرونة الحجمي بالحرف K فان

$$K = \frac{\Delta P}{\Delta V / V_0} = V_0 \frac{\Delta P}{\Delta V}$$

ولما كانت الكميات K, A، V_0 ثوابت ينتج :

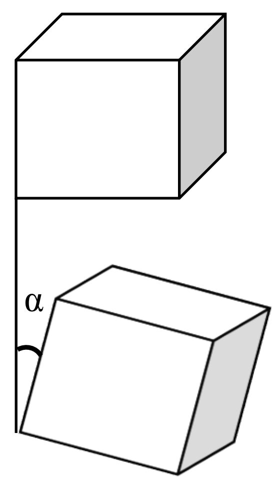
$F \propto \Delta V$

أي ان القوة المشوهة $F = A\Delta P$ تتناسب طرديا مع التشوه الحجمي ΔV

ثالثا : **معامل الصلابة ((معامل القص))**

ان هذا المعامل يقابل التشوه في الشكل الهندسي للجسم الصلب دون ان يصاحبه تغير في الحجم فاذا كان هنالك مكعبا صلبا ماسحة وجهه A ومثبت من الاسفل كما في الشكل وسلطت على احدى الوجوه قوة و مماسيه (موازية) مقدارها F تسمى (قوة القص) ان هذه القوة تودي الى حدوث تشوه يقاس من خلال الزاوية α هذه الزاوية تسمى المطاوعة القصية ان النسبة بين الاجهاد القصي $\frac{F}{A}$ الى المطاوعة القصية α يدعى معامل الصلابة او معامل القص ويرمز له بالحرف n

$$n = \frac{F/A}{\alpha}$$



حيث A C n ثوابت ينتج ان $F \propto \alpha$

أي ان القوة المشوهة F تتناسب طرديا مع التشوه القصي α

ان الصيغة العامة لقانون هوك يمكن وصفها بالصيغة التالية "القوة المشوهة تتناسب طرديا مع مقدارر التشوه ضمن حدود المرونة "

هنالك كميات ذات أهمية في المرونة تدى نسبة بويسون ويرمز لها بالحرف σ وتعرف على انها النسبة بين المطاوعة العرضية الى المطاوعة الطولية فاذا كان لدينا وتر أسطواني منتظم من المطاط مثلا طوله L_0 وقطره D_0 فعند تسليط قوة شد عليه فان طوله يزداد بمقدار ΔL وقطره ينقص بمقدار ΔD وبذلك يكون

$$\sigma = \frac{\Delta D / D_0}{\Delta L / L_0}$$

ان معامل المرونة Y , K, n ونسبة بويسون ترتبط مع بعضها وفق العلاقة التالية

$$Y = 2n(1+\sigma)$$

$$K = Y / 3(1-2\sigma)$$

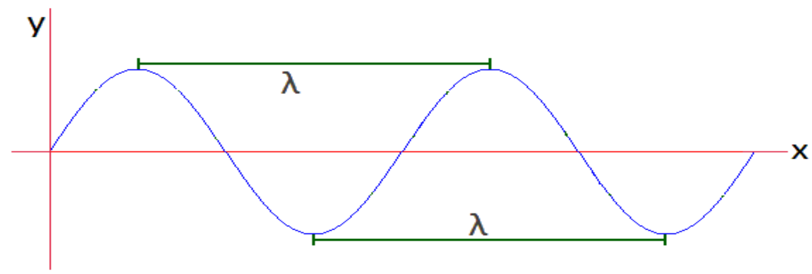
2- خاصية القصور الذاتي :

ان خاصية القصور الذاتي تمثل صفة استمرارية الجسم او أجزاء الوسط المادية على البقاء في حالة حركة ثابتة مالم تؤثر عليه قوة خارجية تغير تلك الحاله.
القانون الذي يطبق هذه الحالة يدعى بقانون الاستمرارية والذي ينص على ان كل جسم يبقى في حاله السكون او الحركة مالم يؤثر عليه بقوة خارجية ويوصف أي جسم بدلالة كمية مادته التي تعرف بالكتلة وكتلة الجسم تحدد مقدار مقاومته لتغير حالته الحركية وعليه فان خاصية الكتلة تمثل القصور الذاتي , لذلك فان الكتلة هي المقياس الكمي للقصور الذاتي .وغالبا مايعبر عن خاصية الاستمرارية او القصور الذاتي لاي جسم من خلال كتلة وحدة الحجوم أي الكثافة .لذلك فان القصور الذاتي لاي وسط مادي يزداد بازدياد كثافته . أي ان كثافة الوسط تحدد اثر القوة المؤثرة عليه .فكلما ازدادت كثافة الوسط قلت استجابته لتأثير القوة الخارجية فيه لتغير حالته الحركية .

الفصل الثاني

مفاهيم في الحركة التوافقية البسيطة :

1- الذبذبة الكاملة :- هي حركة الجسم التي يقطع فيها مسارا رواحا ومجيئا

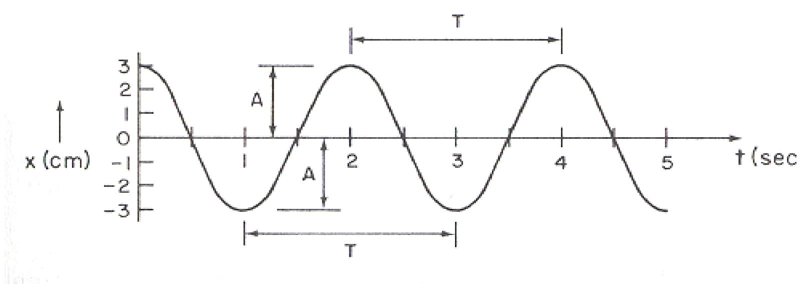


2- مدة الذبذبة T Reriod وهي الزمن اللازم لذبذبة كاملة.

3- التردد (f) frequency وهو عدد الذبذبات التي يصنعها الجسم المهتز حيث $T = \frac{1}{f}$.

4- الازاحة (x) Displacement وهي بعد الجسم عن موقع استقراره في اية لحظة .

5- السعة (A) Amplitude هي اعظم قيمة للإزاحة وعليه مدى الحركة الكلي هو 2A ويصح هذا في كون الحركة توافقية بسيطة غير متضائلة . أي حين لا يتعرض المهتز او المتذبذب لقوى تعيق حركته .

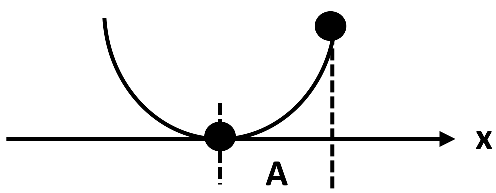


في المنحني التالي رقم 1 يمثل x_1=asinwt اما المنحني رقم 2 فيمثل X_2=asinwt+$\frac{\pi}{2}$ وعليه يمون الطور متقدما بمقدار $\frac{\pi}{2}$ ويساوي ربع موجة ($\frac{1}{4}$) الزمن لذبذبة واحدة .اما المنحني رقم 3 فانه يمثل(X_3=asin(wt+$\frac{\pi}{2}$ ويكون الطور مختلفا بمقدار ($\frac{1}{4}$) زمن ذبذبة واحده بالنسبة للمنحني الأول.

معادلة الحركة التوافقية البسيطة:-

هي تلك الحركة التي تكون فيها القوة المؤثرة F على جسم او نظام متناسبة طرديا مع الازاحة(x) بالنسبة لنقطة ثابتة وتتجه نحو تلك النقطة دائما ضمن حدود المرونة .

لو اخذنا شريطا رقيقا من الفولاذ وعلقنا في طرفه جسما صلب وجعلناه يتحرك بدفعة صغيرة بحيث تكون حركته مستقيمة . فان القوة المعيدة الناتجة من تأثير الشريط الفولاذي تحاول ارجاع اللجسم نحو وضع الاستقرار .فيتحرك الجسم نحو المركز بسرعة متزايدة غير ان معدل الزيادة لا يكون ثابتا لأن القوة المسرعة تصغر كلما اقرب الجسم من المركز .وعندما يبلغ الجسم المركز تكون القوة المعيدة قد تناقصت الى الصفر. ولكن الجسم يتخطى وضع الوازن ويواصل حركته نحو الجهة الثانية وذلك بسبب السرعة التي اكتسبها فلو لم يكن هناك ضياع في الطاقة بالاحتكاك لاستمرة الحركة بدون توقف لايجاد العلاقة الناتجة من هذه الحركة كما في الشكل



في أي خط لجسم يتذبذب على بعد X من موضع الاستقرار

حيث F محصلة القوى على الجسم

وتساوي القوة المرنة المعيدة Kx- حسب قانون هوك أي ان F=-kx ومن قانون نيوتن الثاني فان

$$F = -Kx = ma = mv\frac{dv}{dx}$$

حيث K ثابت التناسب

m كتلة الجسم المتحرك

a التعجيل و v السرعة

$$mv\frac{dv}{dx} + Kx = 0 => m\int vd\,v + k\int x\,dx = 0$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = c_1$$

الحد الأول يمثل الطاقة الحركية اما الحد الثاني عبارة عن الطاقة الكامنة اما c_1 يمثل الطاقة الكلية للجسم

السرعة في الموقع (o) تكون اعظم مايمكن V_{max} الطاقة الكلية تكون جميعها حركية أي ان

$$E_{total} = Ek = \frac{1}{2}mv_{max}^2$$

حيث إشارة v تعتمد اتجاه الحركة

$$v_{max} = \pm\sqrt{2E/_{m}}$$

اما في نهاية المسار تكون الطاقة جميعها كامنة والحركية صفر

$$E = Ep = \frac{1}{2}Kx_{max}^2$$

$$x_{max} = \pm\sqrt{2E/_{K}} \qquad **$$

ان السرعة V عند أي إزاحة X تساوي

$$v = \sqrt{\frac{2E - kx^2}{m}} \qquad ***$$

عند تعويض المعادلة **في المعادلة *** ينتج انه

$$\frac{dx}{dt} = v = \sqrt{\frac{K}{m}}\sqrt{A^2 - x^2}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}}dt$$

$$sin^{-1}\frac{x}{A} = \sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2 \qquad Hw?$$

فاذا كانت X_0 هي قيمة X في اللحظة t=0 فان

$$C_2 = sin^{-1}\frac{X_0}{A}$$

وعليه فان C_2 هي الزاوية ونرمز لها بالرمز θ_o

$$sin\theta_o = \frac{X_o}{A}$$

$$\therefore\ sin^{-1}\frac{x}{A} = \sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta_o$$

$$x = Asin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta_o\right)$$

θ_o هي زاوية طور ابتدائية.

و $\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta_o\right)$ هي زاوية طور الحركة

ويمكن التعبير عن الحركة الموجيه التوافقية البسيطة بشكل دالة جيب تمام أيضا اذا كانت زاوية الطور الابتدائية تساوي $\frac{\pi}{2}$ وبما ان دالة الجيب او الجيب تمام تتغير من (1 , -1) فان الازاحة للجسم هي (x) تتغير مابين (A,- A) وان الازاحة X لها نفس القيمة في الزمن t والزمن (t+T)

وزاوية الطور $\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta_o\right)$ تزداد بمقدار 2π خلال الزمن أي ان

$$\sqrt{\frac{k}{m}}(t+T) + \cancel{\theta_0} = \left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \cancel{\theta_0}\right) + 2\pi$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}}\,T = 2\pi \quad \Longrightarrow \quad T = \sqrt{\frac{m}{k}}\,2\pi$$

ان T تعتمد فقط على الكتلة m وثابت التناسب k, v تعتمد على السعة (او الطاقة الكلية cv وعليه فان T تكون ثابتة سواء كانت سعة الجسم صغيرة ام كبيرة

التردد f يساوي $2\pi f = w$

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\therefore x = A\sin(wt + \theta_o)$$

$$\frac{dx}{dt} = v = w\sqrt{A^2 - x^2} = wA\cos(wt + \theta_o)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = a = -w^2 A\sin(wt + \theta_o)$$

$$a = -w^2 x$$

$$x + w^2 x = 0$$

ان المعادلة الاخيرة هي الشكل العام لمعادلة الحركة التوافقية البسيطة وحلها هو

$$x = A\sin(wt + \theta_o)$$

ان التعجيل في الحركة التوافقية البسيطة يتناسب مع الازاحة ويعاكسها وان التعجيل يبلغ قيمته العظمى عند $X_{max} = \pm A$

عندها السرعة تكون معدومة أي ان $a_{max} = \pm w^2 A$

عندما يمر الجسم بوضع التوازي $X=0$ فان سرعته تبلغ قيمتها العظمى وينعدم التعجيل أي ان

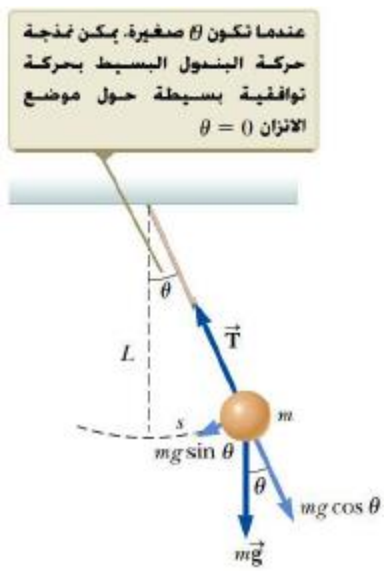
$v_{max} = \pm wA$

حيث ان اقصى قيمة لدالة الجيب او الجيب تمام هي ± 1

امثله على الحركه التوافقيه البسيطه

1- البندول البسيط ;The pendulum ;

يعتبر البندول البسيط أحد الأنظمة الميكانيكيه التي تعمل حركة دورية. يتكون البندول البسيطة من جسم كتلته m معلق بخيط طوله L في أحد طرفيه والطرف الأخر ثابت، كما هو موضح في الشكل. تحدث الحركه على المستوى الراسي وتستمر تحت تاثير قوه الجاذبيه. سوف نثبت انه عندما تكون الزاوية θ صغيره اقل من 10^o (فان حركة البندول هي حركة توافقية بسيطة).



ان القوة القوه الموثره على الجسم المعلق هي قوة الشد T التي تتولد في الخيط وقوةالجاذبيه الأرضية mg. تؤثر المركبه المماسيه $mgsin\theta$ دائما في الاتجاه الذي يجعل الزاوية $\theta = 0$،

وفي عكس الإزاحة التي تحدث للجسم بالنسبة لموضع الاتزان. لهذا فان المركبه المماسيه تعتبر هي القوة الاسترجاعيه *restoring force*، ويمكننا هنا أن نطبق قانون نيوتن الثاني على الحركه في الاتجاه المماسي

$$Ft = ma \quad \rightarrow \quad -mg \sin \theta = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

حيث ان s هي موضع الجسم مقاسا بطول القوس والإشارة السالبة تشير الى أن القوه المماسيه تشير الى نحو نقطة الاتزان. وحيث ان $s = \theta L$ وحيث أن L ثابتة فان المعادله السابقة تصبح على النحو التالي:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} sin\theta$$

باعتبار انθ هي الموضع. دعنا نقارن هذه المعادله مع المعادله 3.1. هل تمتلك نفس الشكل الرياضي يتناسب الشق الأيمن مع $sin\theta$ وليس مع θ، وهذا قد يقودنا الى أن نتوقع أن تكون هذه الحركه لا تخضع لقوانين الحركه التوافقية البسيطة، لان هذه المعادله ليس لها نفس الشكل الرياضي للمعادلة 3.1. على كل حال، إذا افترضنا إن الزاوية θ صغيره فمن االممكن أن نستفيد من التقريب$sin\theta \approx \theta$ ، وعليه فان هذا التقريب سوف يجعل المعادله على النحو التالي

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta$$

الآن اصبح لدينا معادلة حركة توافقية بسيطة مثل المعادله 3.1، ومنها نستنتج ان حركة البندول بإزاحات صغيره هي حركة توافقية بسيطة. وعليه يمكن أن نكتب دالة الزاوية $\theta = \theta_{max}\cos(wt + \alpha)$ حيث θ_{max}هي اكبرموضع زاوي للبندول والتردد الزاوي w يعطى على النحو التالي:

$$w = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

اما الزمن الدوري فيعطى على النحو التالي:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

ومن هنا نستنتج ان الزمن الدوري والتردد للبندول البسيط يعتمدان على طول الخيط وعلى عجلة الجاذبيه الارضية. بما ان الزمن الدوري لا يعتمد على كتلة الجسم المعلق في البندول، نستنتج ان كل بندول بسيط له نفس الطول له نفس الزمن الدوري بالطبع اذا كانوا على الكرة الارضية تحت تاثير عجلة الجاذبيه الارضية.

يمكن ان يتسخدم البندول البسيط في تحديد الوقت لان زمنه الدوري يعتمد فقط على طول البندول وعلى عجلة الجاذبيه الأرضية، كما يمكن ان يستخدم كاداة لقياس عجلة الجاذبيه الأرضية، وهذه القياسات مهمة جداً لرصد التغيرات في عجلة الجاذبيه الأرضية في مناطق مختلفه على سطح الكرة الأرضية وربما تساعد هذه القياسات في التنقيب عن النفط في بعض الاحيان.

مثال _1: جسم كتلته هي 25gm وثابت الحركة K=400 dyn/cm ابتدأ الحركة بإزاحة 10cm الى اليمين من موضع توازنه وبسرعة V=40cm/sec اوجد F,w,V,x,a

$x = Asin(wt + \theta_o)$

$v = Acos(wt + \theta_o)$

$a = -Aw^2 sin(wt + \theta_o)$

$$F = \frac{1}{T} \quad where \ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{25}{400}} = 1.57sec$$

1- $F = \frac{1}{1.57} = 0.63\ sec^{-1}$

2- $\omega = 2\pi f = 2 * 3.14 * 0.63 = 4\ \frac{rad}{sec}$

3- $A = \sqrt{\frac{2E}{K}} \ where \ E = \frac{1}{2}m{v_o}^2 + \frac{1}{2}K{x_o}^2$

$$= \frac{1}{2} * 25 * 40^2 + \frac{1}{2}400 * 10^2 = 40 * 10^3 erg$$

$$A = \sqrt{\frac{2*40*10^3}{400}} = 10\sqrt{2}cm$$

$$sin\theta_o = \frac{X_o}{A} = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow\!\!\!> \ \theta_o = \frac{\pi}{4}rad$$

$$x = 10\sqrt{2} * \sin\left(4t + \frac{\pi}{4}\right)\ cm$$

$$v = 10\sqrt{2} * 4 * cos\left(4t + \frac{\pi}{4}\right) cm.s^{-1}$$

$$a = -10\sqrt{2} * (4)^2 * sin\left(4t + \frac{\pi}{4}\right) cm.s^{-2}$$

$$at \quad t=\frac{\pi}{8} \Rightarrow \left(4*\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{6\pi}{8}\right)=\frac{3\pi}{4}rad$$

$$x=10\sqrt{2}*sin\frac{3\pi}{4}=10\ cm$$

$$v=40\sqrt{2}*cos\frac{3\pi}{4}=-40\ cm.s^{-1}$$

$$a=-160\sqrt{2}*sin\frac{3\pi}{4}=-160\ cm.s^{-2}$$

مثال_ 2: علق جسم كتلته *500gm* بنابض حلزوني كتلته مهملة فتمدد *0.07cm* احسب *w*, *f* اذا ازيح الجسم عن وضع توازنه الى الأسفل إزاحة تساوي *3cm* متجه نحو الأسفل وبسرعة تساوي *40cm/sec*

$$k=\frac{mg}{\Delta L}=70*10^3 dyn/cm$$

$$w=\sqrt{k/_m}=11.8rad/sec$$

$$\frac{1}{2}m{x_o}^2=315*10^3\ erg$$

$$\frac{1}{2}m{v_o}^2=4*10^5 erg$$

$$\therefore E=715*10^3 erg$$

$$\frac{1}{2}kA^2=715*10^3 erg$$

$$\therefore A=4.5cm$$

بعض الأمثلة الاخرى :

1- تمدد نابض بمقدار *3.9cm* عندما علق جسم كتلته *10g* احسب الزمن عندما يعلق فيه جسم كتلته *25g*

الحل :

$$F = k\Delta L = mg$$

$$k = \frac{mg}{\Delta L} = \frac{10 * 9.8 * 10^{-3}}{3.9 * 10^{-2}} = 2.5\frac{N}{m}$$

$$T = \frac{2\pi}{w} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{25 * 10^{-3}}{2.5}} = 0.635sec$$

2- جسم كتلته *20g* يتحرك حركة توافقية بتردد *3Hz* وبسعة مقدارها *5cm*

- ماهي المسافة الكلية للجسم المتحرك خلال دورة كاملة
- ماهي السرعة القصوى للجسم
- ماهو التعجيل الأقصى للجسم

الحل :

A=5cm

F=3Hz

- $d_{total} = 4A = 20cm$
- $v_{max} = Aw = A(2\pi f) = 5 * 3.14 * 3 = 94.2\frac{cm}{s}$

تظهر عند *x=0*

- $a_{max} = Aw^2 = 5(2 * 3.14 * 3)^2 = 4441\ cm/sec^2$

3- جسم معادلة الحركة له عند زمن *t=0.25 sec* هي $x = 4\cos(3\pi\ t + \pi)$ حيث ان x هي بالمتر والزمن هو بالثانية احسب :

- التردد والزمن
- السعة
- ثابت الطور
- المسافة للجسم عند الزمن *t=0.25 sec*

الحل:

$$w = 3\pi\ , T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{3\pi} = 0.66\ sec$$
$$F = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.66} = 1.5\ Hz$$
$$A = 4m$$
$$\theta_0 = \pi$$
$$x(0.25) = 4cos(3\pi(0.25) + \pi) = 4cos(0.75\pi + \pi) = 4cos(1.75\pi)$$
$$= 4.0m(0.707) = 2.82\ m$$

4- جسم كتلته m وضع على نابض وكانت $k=6.5\ N/m$ وترك يتذبذب بحركة توافقية بسيطة بسعة مقدارها $10cm$ تم قياس السرعة عندما كانت الكتلة في منتصف المسافة بين نقطة التوازن واعلى نقطة وكانت $30cm/sec$ احسب :

- كتلة الجسم
- زمن الحركة
- اعلى تعجيل للجسم

الحل :

$$k = 6.5\ N/m \quad , \quad A = 10cm$$
$$x = 1/2\ A \quad , \quad v = 30cm/sec$$
$$x = Asinwt \quad , \quad V = AWcoswt$$
$$x(t_1) = Asinwt_1 = \frac{1}{2}A$$
$$sinwt_1 = \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ wt_1 = 0.52\ rad$$
$$V(t_1) = Awcos(wt_1) = 30 \quad \Rightarrow \quad 10wcos(0.52) = 30$$
$$w = 3.64$$

$$w = 2\pi F = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad w^2 = \frac{k}{m} \;\Rightarrow m = \frac{6.5\,\frac{N}{m}}{(3.64)^2} = 0.491\; kg$$

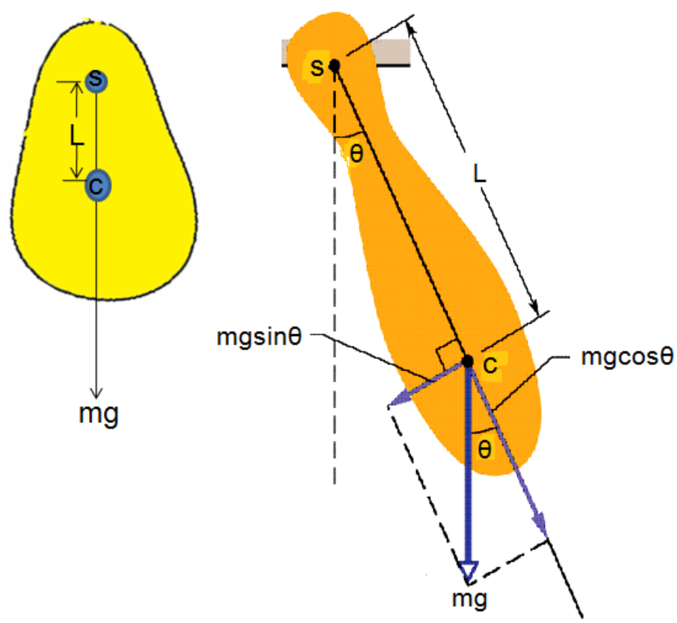
$$F = \frac{w}{2\pi} \;\; \Rightarrow \;\; T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{3.64} = 1.73 sec$$

$$x = Asinwt, v = Awcoswt, a = -Aw^2 sinwt$$

$$a_{max} = Aw^2 = 10 * (3.64)^2 = 132\,\frac{cm}{sec^2}$$

2- البندول الفيزيائي أو البندول المركب: Physical Pendulum or Compound Pendulum

أن أي جسم صلب مهما كان شكله وقادر على التذبذب حول أي محور أفقي يمر خلاله يدعى بالبندول الفيزيائي (المركب). وفي الواقع فان جميع البندولات الحقيقية هي بندولات فيزيائية. وما البندول البسيط إلا حالة خاصة من هذا النوع من البندولات. لنأخذ بندول فيزيائي على شكل جسم غير منتظم يمكنه أن يدور حول محور أفقي أملس يمر من النقطة s التي تدعى بنقطة التعليق كما مبين بالشكل الأتي. يلاحظ من الشكل الذي يقع إلى اليمين انه في حالة التوازن يقع مركز الكتلة c للجسم على نفس الخط العمودي المار بنقطة التعليق s فإذا فرضنا أن المسافة بين نقطة التعليق ومركز الكتلة هي L وان كتلة الجسم هي m وان عزم القصور الذاتي للجسم حول نقطة التعليق حيث يمر محور الدوران هي I. في آية لحظة زمنية تكون القوة المؤثرة على الجسم عموديا نحو الأسفل هي mg وعند إزاحة الجسم إزاحة زاوية صغيرة θ فان الخط الواصل بين s و c يصنع زاوية θ مع العمود وبذلك يكون عزم القوة المعيدة التي تحاول أعادة الجسم إلى موضع توازنه الأصلي تساوي $mgL\sin\theta$ وهذا العزم الوحيد الذي ينتج التعجيل الزاوي $(d^2\theta/dt^2)$ في البندول . وعليه فان معادلة الحركة للبندول هي



الشكل على اليسار البندول في حالة توازن والشكل على اليمين البندول وقد أزيح إزاحة زاوية θ عن موضع التوازن

إن الإشارة السالبة هنا تشير إلى أن القوة المعيدة متجهة دائما نحو موضع التوازن. وإذا كانت الزاوية θ صغيرة صغرا كافيا، فعندئذ تكون العلاقة $sin\theta=\theta$ صحيحة لدرجة عالية من الدقة، وبذلك تصبح المعادلة (1) كالأتي

$$\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) = -(\frac{mgL}{I})\theta \qquad (2)$$

وهذه تمثل معادلة الحركة الزاوية التوافقية البسيطة التي تحدث عندما تكون السعات صغيرة. وفي هذه الحالة يكون التردد الزاوي ω هو

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}} \qquad (3)$$

ومن هذه العلاقة نجد التردد الطبيعي f و الزمن الدوري T على الترتيب

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgL}{I}} \qquad (4)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} \qquad (5)$$

ويمكن إيجاد قيمة عزم القصور الذاتي I حول محور الدوران من العلاقة

$$I = mL^2 + mk^2 \qquad (6)$$

حيث أن k يمثل نصف قطر التدويم حول مركز كتلة البندول وبالتعويض نجد أن التردد الطبيعي للبندول المركب هو

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L+\frac{k^2}{L}}} \qquad (7)$$

وان الزمن الدوري هو

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L+\frac{k^2}{L}}{g}} \qquad (8)$$

وهنا يشير المقدار $(L+(k^2/L))$ إلى الطول المكافئ للبندول. والجدير بالذكر انه في السعات الكبيرة تكون حركة البندول الفيزيائي دورية، ولكنها لا تكون توافقية بسيطة.

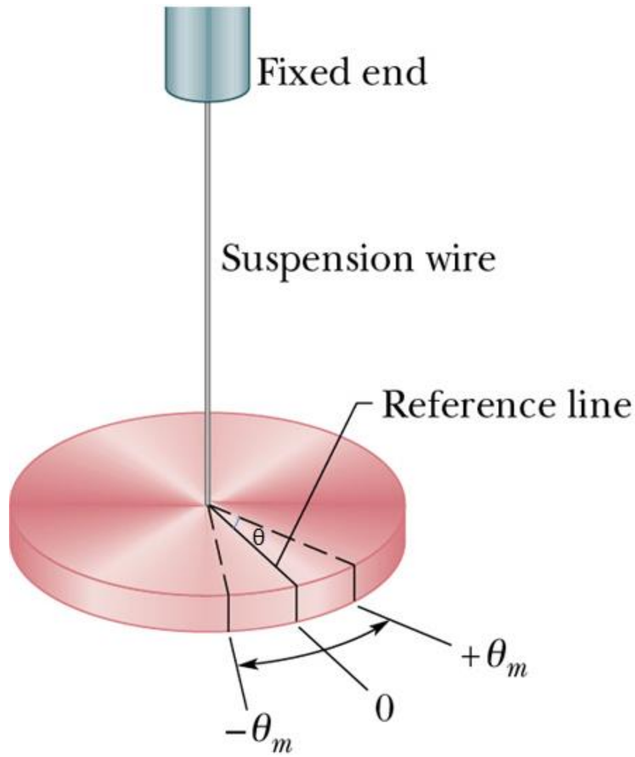
3-بندول اللي: Torsional Pendulum

يتألف بندول اللي من قرص اسطواني معلق من مركزه بطرف قضيب رقيق (أو سلك) يتصل بمركز ثقل القرص اتصالا وثيقا ويتصل الطرف الآخر من القضيب بمسند ثابت كما مبين بالشكل.عندما يكون البندول في وضع التوازن أي في حالة سكون نرسم خطا من المركز إلى النقطة $+\theta_m$ كما موضح في الشكل. إذا أدير القرص أفقيا إلى النقطة $-\theta_m$ بزاوية θ يحدث لي في القضيب ونتيجة ذلك يؤثر القضيب بعزم لي T يعمل على أعادة البندول إلى موضع التوازن الأصلي. ومن قانون هوك الذي يشير إلى أن عزم لي الإرجاع T يتناسب طرديا مع مقدار اللي الذي يتمثل بمقدار الإزاحة الزاوية θ أي أن $T\alpha\theta$ ومن ذلك نحصل على

$$\mathrm{T} = -k\theta \qquad (1)$$

حيث أن k هو ثابت التناسب ويدعى بثابت اللي ويتوقف مقداره على طول وقطر السلك وطبيعة مادته. والإشارة السالبة توضح أن عزم اللي يعمل في اتجاه معاكس لاتجاه زيادة الإزاحة الزاوية. وعندما يحرر البندول بعد إزاحته بزاوية θ فان عزم اللي الذي يمثل عزم القوة المعيدة يولد تعجيل زاوي $(d^2\theta/dt^2)$ يتناسب طرديا مع الإزاحة الزاوية ، والحركة الناتجة تدعى بالحركة الزاوية التوافقية البسيطة. ومعادلة الحركة لهذا البندول هي

$$\mathrm{T} = -k\theta = I(d^2\theta/dt^2) \qquad (2)$$



حيث I يمثل عزم القصور الذاتي للقرص، نرتب المعادلة (2)فتصبح

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -(\frac{k}{I})\theta \qquad (3)$$

ويلاحظ أن شكل هذه المعادلة مطابق تماما من وجهة النظر الرياضية للمعادلة القياسية للحركة الخطية التوافقية البسيطة

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -(\frac{k}{m})x \qquad (4)$$

حيث أننا استبدلنا الإزاحة الخطية x بالإزاحة الزاوية θ والكتلة m بعزم القصور الذاتي I وثابت النابض بثابت اللي k والحل العام للمعادلة (3) يمكن الحصول عليه بنفس الطريقة السابقة فنجد أن الإزاحة الزاوية θ في أية لحظة زمنية T هي

$$\theta = \theta_o cos(\omega t - \varphi) \qquad (5)$$

حيث أن θ_o هي النهاية العظمى للإزاحة الزاوية أي سعة الذبذبة الزاوية و φ هي زاوية الطور الابتدائي للحركة و ω هو التردد الزاوي والتردد الزاوي لبندول اللي هو

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{I}} \qquad (6)$$

ومنها نجد التردد الطبيعي f والزمن الدوري T على الترتيب

$\omega=2\pi f$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{I}} \qquad (7)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}} \qquad (8)$$

مثال: جسم كتلته 1g يتذبذب بـS.H.M سعة الذبذبة 2mm وكان تعجيله في نهاية المسار $8000 m/S^2$. احسب زمن الذبذبة ، التردد وسرعة الجسيم عندما يمر في مركز الاستقرار، وعندما يكون على مسافة 1.2mm من موضع الاستقرار، ثم اكتب معادلة القوة المؤثرة على الجسم كدالة للإزاحة أولا وللزمن ثانيا.

ج: في نهاية المسار تصبح الإزاحة تساوي السعة، أي أن

$x=A$

$a=\omega^2 x$

$a=\omega^2 A$

$8000=2x10^{-3}\ \omega^2$

$\omega^2=8000/0.02=4x10^6$

$\omega=2x10^3 S^{-1}$

$T=2\pi(m/k)^{1/2}=2\pi/\omega=2\pi/2x10^3$

$T=\pi x10^{-3}=0.00314S$

$f=1/T=1000/\pi=318.31Hz$

$V_{max}=\omega A=2x10^3x2x10^{-3}=4m/S$

$V_{1.2mm}= [(k/m)(A^2-x^2)]^{1/2}=\omega\ (A^2-x^2)^{1/2}=2x10^3[(2x10^{-3})^2-(1.2x10^{-3})^2]^{1/2}$

$V_{1.2mm}=32m/S$

$F=-kx$

$\omega^2=k/m$

$k=\omega^2 m=4x10^6x1x10^{-3}=4x10^3$

$F=4x10^3x1.2x10^{-3}=4.8N$

أي أن معادلة القوة كدالة للإزاحة تساوي

$F=-4x10^3.x$

ومعادلة القوة كدالة للزمن t.

$F=kAcos\omega t$

$F=4x10^3x2x10^{-3}cos2x10^3t$

$F=8cos2x10^3t$

مثال:نابض حلزوني ثبت طرفه العلوي في نقطة ووجد انه عند تعليق جسم كتلته 1kg يستطيل النابض بمقدار 10cm فإذا ابعد الوزن وعلق جسم كتلته 2kg بدلا عنه وسحب مسافة 8cm نحو الأسفل وأطلق من السكون احسب، ثابت القوة، مدة الذبذبة ، السرعة العظمى والتعجيل الأعظم، السرعة والتعجيل والزمن المستغرق بعد أن يقطع الجسم نصف المسافة بين موضعه الابتدائي ومركز الاستقرار.

ج:نستخدم الكتلة 2kg لان الجسم عندها بدا يتذبذب.

$F=-kx$

$k=F/x=mg/x=1x9.8/10x10^{-2}=98N/m$

$T=2\pi(m/k)^{1/2}=2\pi/\omega$

$T=2\pi(2/98)^{1/2}=(2\pi/7)=0.9S$

$V_{max}=\omega A=(2\pi/T)xA=7x8x10^{-2}=0.56m/S$

$a_{max}=\omega^2A=7^2x8x10^{-2}=3.92m/S^2$

$V_{4cm}=\omega(A^2-x^2)^{1/2}=7[(8x10^{-2})^2-(4x10^{-2})^2]^{1/2}=0.485m/S$

$a_{4cm}= \omega^2x=7^2x4x10^{-2}=1.96m/S^2$

$x=Acos\omega t$

$4=8\cos 7t$

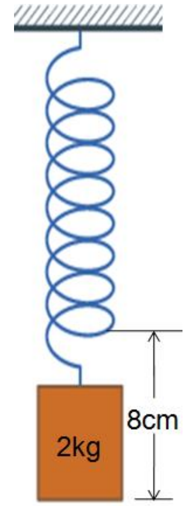
$(4/8)=\cos 7t$

$0.5=\cos 7t$

$\cos^{-1}(0.5)=7t$

$(\pi/3)=7t$

$t=\pi/21=0.15S$



مثال:جسم كتلته 0.5kg يتحرك بـSHM بزمن ذبذبة 0.1S وسعة الذبذبة 10cm. احسب التعجيل، القوة، الطاقة الحركية والكامنة عندما يكون الجسم على بعد 5cm من موضع الاستقرار.

ج:

$a=\omega^2 x$

$a=(2\pi/T)^2 x=(4\pi^2/0.01)(5)=19739.21cm/S^2$

$F=ma=500(2000\pi^2)=59.22dyne$

$F=-kx=mx\omega^2=(4\pi^2/0.01)(500)(5)=59.22dyne$

$E_k=0.5m\omega^2(A^2-x^2)=(0.5)(500)(4\pi^2/0.01)(10^2-5^2)=74022033.01erg$

$Ep=0.5kx^2=0.5m\omega^2 x^2=(0.5)(500)(4\pi^2/0.01)(5^2)=24674011.003erg$

مثال:إذا كانت معادلة الحركة لجسيم تعطى بالمعادلة ($x=A\sin(\omega t+\pi/2)$)، افرض إن ($t=0$) وان الجسيم في أقصى إزاحة عن موضع استقراره. جد كل من (a,v,x).

ج:

عندما $t=0$ تصبح معادلة الحركة للجسيم

$$x=A\sin(\omega x0+\pi/2)=A\sin(90)=A$$

$$x=A\sin(\omega t+\pi/2)=A\cos(\pi/2)\sin\omega t+A\sin(\pi/2)\cos\omega t$$

$$x=A\cos(0)\sin\omega t+A\sin(90)\cos\omega t=0+A\cos\omega t$$

$$x=A\cos\omega t$$

$$v=(dx/dt)=-A\omega\sin\omega t$$

$$a=(d^2x/dt^2)=-A\omega^2\cos\omega t$$

مثال:يتحرك جسم حركة توافقية بسيطة سعتها 1.5m وترددها 100Hz، احسب:1.التردد الزاوي، 2.سرعته، 3.تعجيله، 4.طوره عندما تكون أزاحته 0.75m.

ج:

1.

$f=1/T$

$T=1/f=1/100=0.01S$

$T=2\pi(m/k)^{1/2}=2\pi/\omega$

$\omega=2\pi/T=2\pi/0.01=628.32Hz$

2.

$v=\omega A=628.32x1.5=942.5m/S$

3.

$a=\omega^2A=(942.5)^2x1.5=1332459.375m/S^2$

4.

$x=A\cos\theta$

$\cos\theta=x/A$

$\theta=\arccos(x/a)=\arccos(0.75/1.5)=\arccos(0.5)=60^o$

$x=A\sin\theta$

$\sin\theta=x/A$

$\theta=\arcsin(x/a)=\arcsin(0.75/1.5)=\arcsin(0.5)=30^o$

مثال:متذبذب توافقي بسيط معادلة حركته $x=4\sin(0.1t+0.5)$ أوجد:1.السعة، السرعة، التعجيل، التردد، زمن الذبذبة، الطور الابتدائي للحركة، 2.الظروف الابتدائية، 3.الموضع، السرعة، التعجيل عند $t=5S$.

ج:

1.

$A=4m,$

$v=dx/dt=0.4\cos(0.1t+0.5)$

$a=d^2x/dt^2=-0.04\sin(0.1t+0.5)=-0.04\cos(0.1x5+0.5)=-0.04\cos(1)=-0.04m/S^2$

$a=\omega^2x$

$0.04=4\omega^2$

$\omega=(0.04/4)^{1/2}$

$\omega=0.1$

$T=2\pi(m/k)^{1/2}=2\pi/\omega=2\pi/0.1=62.832S$

$f=1/T=1/62.832=0.016Hz$

$\varphi=0.5rad$

2.

$x=4\sin(0.1x0+0.5)=4\sin(0.5)=1.75m$

$v=dx/dt=0.4\cos(0.1x0+0.5)=0.4\cos(0.5)=4m/S$

$a=d^2x/dt^2=-0.04\sin(0.1t+0.5)=-0.04\cos(0.1x0+0.5)=-0.04\cos(0.5)=-0.04m/S^2$

3.

$x=4\sin(0.1x5+0.5)=4\sin(1)=6.98m$

$v=dx/dt=0.4\cos(0.1t+0.5)=0.4\cos(0.1x5+0.5)=0.4\cos(1)=0.4m/S$

$a=d^2x/dt^2=-0.04\sin(0.1t+0.5)=-0.04\cos(0.1x5+0.5)=-0.04\cos(1)=-0.04m/S^2$

الفصل الثالث

تركيب الحركات التوافقية البسيطة

لقد درسنا في الفصل الثاني أمثلة على حركة الجسيم المهتز بحركة توافقية بسيطة واحدة، ولكن الواقع هناك أمثلة كثيرة في الفيزياء تندمج فيها حركتان توافقيتان بسيطتان أو أكثر في آن واحد. فغشاء الطبلة في الأذن غالبا ما يتأثر بأكثر من حركة توافقية بسيطة نتيجة لالتقاط الأذن أصوات متعددة بترددات مختلفة في نفس الوقت، والبندول البسيط المعلق بمسند مثبت على سطح باخرة يتأثر آنيا بحركتين إذا ما اهتز كل من البندول والباخرة معا. وقد يكون تأثير هذه الحركات في الجسيم في خط مستقيم واحد أو في خطين مستقيمين متعامدين أو في أي اتجاه آخر. وفي جميع هذه الحالات سنحاول إيجاد محصلة الحركة الناتجة من تأثير هذه الحركات باستخدام قاعدة التركيب.

قاعدة التركيب

إن لهذه القاعدة أهمية خاصة لجميع أنواع الموجات والاهتزازات في الطبيعة، فهي حقيقة تجريبية يمكن التأكد من صحتها من خبراتنا اليومية. وهي تنص"على انه يمكن لحركتين اهتزازيتين أو موجيتين أو أكثر أن تحدثا في نفس النقطة دون أن تؤثر إحداها بالأخرى". "أي بعبارة أخرى يمكن لموجتين أو أكثر أن تنتقلا في وقت واحد خلال نفس النقطة في الفضاء دون أن تتأثر أية موجة بحركة الموجات الأخرى".

أمثلة على قاعدة التركيب

1.عند إلقاء حجرتين أو أكثر في مواقع متباعدة عن بعضها في بركة ساكنة من الماء فان كل حجر سيكون مصدر للموجة على سطح الماء. أن الموجات المتولدة ستتقدم وتتداخل مع بعضها ثم تخرج من منطقة التداخل وتستمر بالتقدم دون أن يتأثر بعضها بالأخر.

2.بالنسبة للموجات الصوتية، فنحن نسمع الصوت الصادر من مصدر معين بالرغم من أن هذا الصوت ينتقل في الفضاء الذي يحتوي على موجات صوتية أخرى.

3.وبالنسبة للموجات الضوئية كذلك نحن نرى الأجسام حولنا بوضوح بالرغم من أن الضوء الذي يصل إلى أعيننا من جسم معين ينتقل في فضاء يحتوي على موجات ضوئية كثيرة وفي مختلف الاتجاهات.

أن هذه الحقيقة التجريبية تشير إلى أن الموجات المختلفة تسلك سلوكا مستقلا عن بعضها البعض وهذا يعني انه إذا مرت مجموعة من الموجات في نقطة معينة في الفضاء فان محصلة الإزاحة في تلك النقطة تساوي مجموع الإزاحات المنفردة التي تحدثها الموجات كلا على حدة. إن هذه القاعدة تسري فقط على الحركات

الموجية والاهتزازية الخطية، أي في الحالات التي تخضع لقانون هوك ضمن حدود المرونة فقط، ويمكن التعبير عن الحركات الموجية أو الاهتزازية بمعادلات رياضية خطية.

وابرز هذه المعادلات هي معادلة الحركة التوافقية البسيطة. أن أهمية قاعدة التركيب تتضح بجلاء في أنها وسيلة فعالة تمكننا من تحليل الحركات الموجية والاهتزازية المعقدة إلى مركباتها التوافقية البسيطة. ولقد كان العالم الفرنسي فورير (*G.Fourier*) سباقا في التأكيد على أن الحركات الموجية والاهتزازية الدورية المعقدة ما هي في حقيقتها إلا مجموعة من الحركات التوافقية البسيطة. ومن الجدير بالتنويه إن هذه القاعدة على شموليتها فإنها مقيدة فقط على الحركات الصغيرة التي يمكن وصفها بالمعادلات الخطية حيث تكون سعة الموجة أو الاهتزاز ضئيلة وهذا ما يحدث في اغلب الحالات العملية. أما في حالات الحركة التي توصف بمعادلات غير خطية كتلك التي تمثل الاهتزازات العنيفة والموجات الراجة فان هذه القاعدة لا تتحقق. ولغرض التحليل والتعبير الرياضي عن هذه القاعدة سنستخدم المعادلة التفاضلية للحركة التوافقية البسيطة التي تم اشتقاقها في الفصل السابق وهي

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -w^2x \qquad 1$$

ويلاحظ من هذه المعادلة أن التعجيل $(\frac{d^2x}{dt^2})$ يتناسب خطيا مع الإزاحة من موضع التوازن x وان الحدين في هذه المعادلة مرفوعان للقوة واحد مما يعني أنها بتعبير رياضي معادلة خطية. وبالإضافة لذلك يلاحظ أن الحدين يحتويان نفس المتغير x مما يشير إلى أنها معادلة متجانسة. وان حل هذه المعادلة يعطي وصفا كاملا للحركة. أما إذا لم تكن المعادلة خطية أي أن حدودها لا تتضمن نفس المتغير عندئذ يصبح الحل صعبا ويحتاج إلى رياضيات متقدمة لتحليل الحركة الناتجة. إن مثل هذا غير مطلوب الآن. وسيقتصر تحليلنا الآن على المعادلة الخطية المتجانسة (1) فقط. لنفرض أن الحل الأول المناسب لهذه المعادلة هو

$$x = x_1 \qquad 2$$

حيث x_1 يمكن أن يأخذ أي شكل وليكن $A\sin\omega t$ مثلا. ولنفرض الحل الثاني المناسب لهذه المعادلة هو

$$x = x_2 \qquad 3$$

حيث x_2 يمكن أن يأخذ أي شكل آخر وليكن $B\cos\omega t$ مثلا. نعوض الحد الأول في المعادلة (1) فنجد أن

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + w^2x_1 = 0 \qquad 4$$

ونعوض الحد الثاني في المعادلة (1) فنجد أن

$$\frac{d^2x_2}{dt^2}+w^2x_2=0 \qquad 5$$

نجمع المعادلتين (4) و (5) فينتج

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1+x_2)+w^2(x_2+x_1)=0 \qquad 6$$

وهذا يشير إلى أن هناك ثلاثة حلول للمعادلة (1) هي

$$x=x_1$$

$$x=x_2$$

$$x=x_1+x_2 \qquad 7$$

من ذلك نستنتج إن هناك خاصية مهمة تميز المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة وهي إن التركيب الخطي لأي حلين لمثل هذه المعادلة يعتبر حلا مناسبا لها. أي أن المجموع البسيط لأي حلين هو حل ثالث للمعادلة الخطية المتجانسة. وهذه الخاصية غير صحيحة للمعادلات غير الخطية. إن هذه الخاصية تمثل قاعدة التركيب. وبما أن كل الحركات التوافقية البسيطة تتحكم بها معادلة خطية متجانسة فجميعها إذن تخضع لقاعدة التركيب. أي بصيغة أخرى إن محصلة اهتزازين توافقين أو أكثر مساويا لمجموع الاهتزازات المنفردة التي يتأثر بها الجسم. وسنطبق هذه القاعدة على الجسيم الذي يخضع لتأثير أكثر من حركة توافقية بسيطة واحدة.

2- **تركيب حركتين توافقيتين بسيطتين في نفس الاتجاه**

نفرض ان لدينا جسيما يخضع انيا لحركتين توافقيتين بسيطتين لهما نفس التردد على امتداد المحور السيني وتمثل الحركه التوافقيه البسيطه الاولى بالمعادله

$$x_1=a_1\sin(wt+\theta_1) \qquad 8$$

والحركه التوافقيه البسيطه الثانيه تعطى بالمعادله

$$x_2=a_2\sin(wt+\theta_2) \qquad 9$$

حيث x_1 و x_2 تمثلان الازاحتين الانيتين للجسيم نتيجه تاثير الحركتين التوافقيتين و a_1و a_2 تمثلان سعتي الحركتين , θ_1 , θ_2 يمثلان زاويتي الطور الابتدائيتين , w التردد الزاوي .

ان محصله الازاحه x الناتجه من تركيب الازاحتين هي .

$\sin(A-B) = sinAcosB - sinBcosA$

$\sin(A+B) = sinAcosB + sinBcosA$

$\cos(A-B) = cosAcosB + sinBsinA$

$\cos(A+B) = cosAcosB - sinBsinA$

$$x = x_1 + x_2$$

$$x = a_1 \sin(wt + \theta_1) + a_2 \sin(wt + \theta_2)$$

$$x = a_1[\sin(wt)\cos(\theta_1) + \cos(wt)\sin(\theta_1)] + a_2[\sin(wt)\cos(\theta_2) + \cos(wt)\sin(\theta_2)]$$

$$x = [\{a_1\cos(\theta_1) + a_2\cos(\theta_2)\}\sin(wt)] + [\{a_1\sin(\theta_1) + a_2\sin(\theta_2)\}\cos(wt)]$$

حيث ان a_1 , a_2 , θ_1 , θ_2 , هي ثوابت يمكن ان نفرضها تساوي

$$a_1\cos(\theta_1) + a_2\cos(\theta_2) = Acos(\theta) \qquad *$$

$$a_1\sin(\theta_1) + a_2\sin(\theta_2) = Asin(\theta) \qquad **$$

وبذلك تكون المعادله اعلاه بالشكل التالي

$$x = Acos(\theta)\sin(wt) + Asin(\theta)\cos(wt)$$

$$x = A\sin(wt + \theta) \qquad 1$$

بتربيع وبجمع المعادلتين (* و**) نحصل على

$$[\{Acos(\theta)\}^2 + \{Asin(\theta)\}^2] = [\{a_1\cos(\theta_1) + a_2\cos(\theta_2)\}^2 + \{a_1\sin(\theta_1) + a_2\sin(\theta_2)\}^2]$$

$$A^2[cos^2\theta + sin^2\theta] = [a_1^2\, cos^2\theta_1 + a_2^2\, cos^2\theta_2 + 2a_1\, a_2\, cos\,\theta_1 cos\,\theta_2 + a_1^2\, sin^2\theta_1 + a_2^2\, sin^2\theta_2 + 2a_1\, a_2\, sin\,\theta_1 sin\,\theta_2]$$

$$A^2 = [a_1^2 + a_2^2 + 2a_1\, a_2\,(cos\,\theta_1 cos\,\theta_2 + sin\,\theta_1 sin\,\theta_2)]$$

$$A^2 = [a_1^2 + a_2^2 + 2a_1\, a_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \qquad 2]$$

الان بقسمه المعادليتين (* و**) نحصل على

$$\frac{A\sin(\theta)}{A\cos(\theta)} = \frac{a_1 \sin(\theta_1) \cancel{+} a_2 \sin(\theta_2)}{a_1 \cos(\theta_1) \cancel{+} a_2 \cos(\theta_2)}$$

$$\tan\theta = \frac{a_1 \sin(\theta_1) + a_2 \sin(\theta_2)}{a_1 \cos(\theta_1) + a_2 \cos(\theta_2)} \qquad 3$$

المعادله 1 تمثل محصله الازاحه الانيه x للحركتين التوافقيتين البسيطتين ونلاحظ بانها تشابه المعادلتين x_2 و x_1 مما يشير بانها تمثل حركه توافقيه بسيطه ايضا لها نفس التردد الزاوي المشترك لمركبتي الحركه . A تمثل السعه للحركه التوافقيه البسيطه الناتجه من جمع الحركتين ويمكن ايجادها من العلاقه 2. وان θ تمثل زاويه الطور الابتدائي لمحصله الحركه ويمكن ايجادها من العلاقه 3.

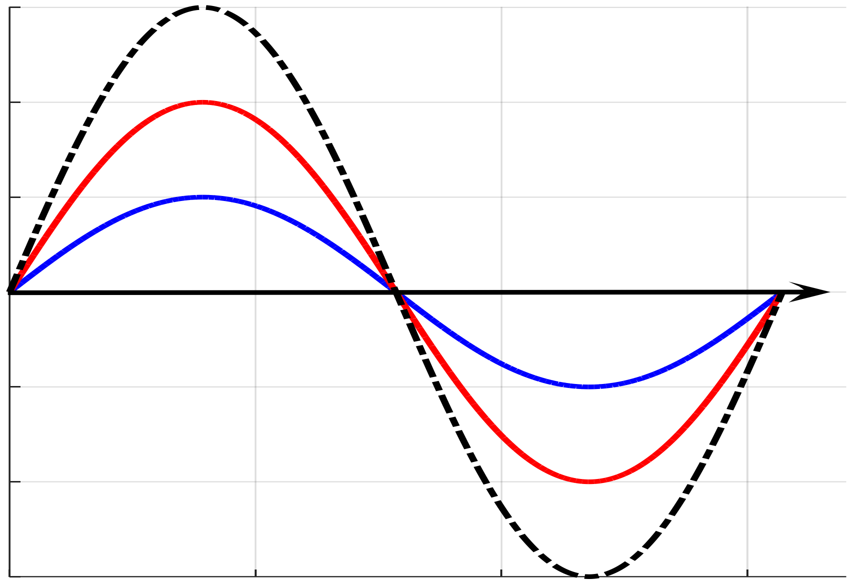
يمكن استخلاص بعض النتائج الهامه للحركه التوافقيه البسيطه من العلاقه 1 فيما يتعلق بالتداخل بين اي حركتين .

1- **التداخل بين حركتين توافقيتين بسيطتين لهما نفس التردد والطور ويختلفان بالسعه**
اي ان

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta$$

فالمعادله تصبح كالاتي

$$x = (a_1 + a_2)\sin(wt + \theta) \qquad \textit{prove that}$$



من الشكل اعلاه نلاحظ بان سعه الحركه الاهتزازيه الناتجه تساوي مجموع سعتي الحركتين المتداخلتين اللتين لهما نفس التردد والطور . اي ان الحركتين التوافقيتين في هذه الحاله تقويان بعضهما البعض ويسمى **التداخل البناء**. وعند تساوي السعتين فان محصلتهما تكون صعف السعه الاصليه.

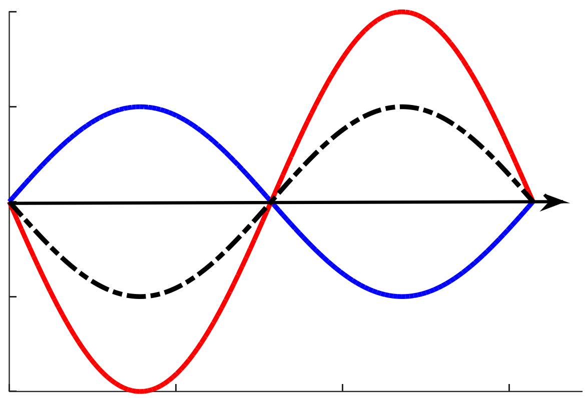
2- **التداخل بين حركتين توافقيتين بسيطتين لهما نفس التردد ولكن يختلفان بالسعه والطور.**

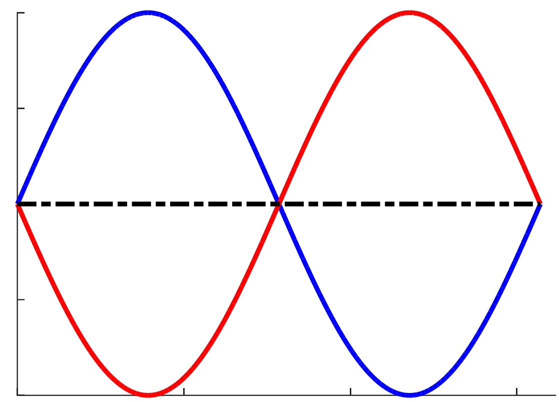
لناخذ حاله هي ان

$\theta_2 = \pi$ و $\theta_1 = 0$

تصبح المعادله اعلاه بالشكل التالي

$x = (a_1 - a_2)\sin(wt)$ $\quad\quad$ *prove that*





نلاحظ من الشكل بان محصله السعه تساوي الفرق بين سعتي الحركتين التوافقيتين المتداخلتين وتقع قمه احداهما فوق قعر الاخرى ان الحركتين تعاكس احداهما الاخرى وفي هذه الحاله فانهما تهدمان بعضهما البعض ويسمى **بالتداخل الهدام** . في حاله $a_1 = a_2$ فان المحصله تساوي صفرا كما في الشكل اعلاه.

أشكال ليساجو: Lissajous Figures

عندما يخضع جسيم آنيا لحركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين فان محصلة الحركة للجسيم تكون على مسار منحن، وشكل هذا المنحني يدعى بشكل ليساجو. أن هذا الشكل يعتمد على سعة وتردد كل من الحركتين التوافقيتين البسيطتين وفرق الطور بينهما. فلو كان لدينا بندول بسيط معلق من نقطة تتحرك بحركة توافقية بسيطة باتجاه المحور الصادي وسمح لكرة البندول أن تذبذب بنفس الوقت بسعة صغيرة باتجاه المحور السيني فان كرة البندول ستخضع لحركتين متعامدتين في وقت واحد. ونتيجة ذلك فان كرة البندول ستتحرك في بعدين بمسار يحدده محصلة هاتين الحركتين فإذا كانت النسبة بين ترددي الحركتين مساويا لعدد صحيح وفرق الطور بينهما زاوية معينة فان شكل المسار يكون مغلقا. ويمكن توضيح ذلك تحليليا وبيانيا بأمثلة محددة.

1.تركيب حركتين توافقيتين بسيطتين في اتجاهين متعامدين

لنفرض أن لدينا جسيما يتأثر آنيا بحركتين توافقيتين بسيطتين أحداهما تؤثر باتجاه المحور السيني والأخرى تؤثر باتجاه المحور الصادي وسنعتبر أولا الحالة التي يكون الترددان متساويين. فلو فرضنا أن الإزاحة الآنية للجسيم على امتداد المحور السيني هي

$$x = asin(\omega t + \theta) \qquad 1$$

والإزاحة الآنية لنفس الجسيم على امتداد المحور الصادي هي

$$y = bsin\omega t \qquad 2$$

يلاحظ هنا أن الحركتين التوافقيتين السينية والصادية تختلفان في السعة والطور الابتدائي للحركة. وللحصول على المعادلة العامة لمسار الحركة نحذف الزمن بين المعادلتين (1) و (2). من المعادلة (1) نحصل على

$$\left(\frac{x}{a}\right) = sin\omega t cos\theta + cos\omega t sin\theta \qquad 3$$

ومن المعادلة (2) نحصل على

$$\left(\frac{y}{b}\right) = sin\omega t \qquad 4$$

وبالاستفادة من المتطابقة $(cos^2wt + sin^2wt = 1)$ تصبح المعادلة (4) على النحو

$$cos\omega t = \sqrt{1 - \left(\frac{y^2}{b^2}\right)} \qquad 5$$

نعوض المعادلتين (4) و (5) في المعادلة (3) فينتج أن

$$\left(\frac{x}{a}\right) = \left(\frac{y}{b}\right)cos\theta + \sqrt{1 - \left(\frac{y^2}{b^2}\right)}\, sin\theta \qquad 6$$

نرتب هذه المعدلة فتصبح

$$\left(\frac{x}{a}\right) - \left(\frac{y}{b}\right)cos\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{y^2}{b^2}\right)}\, sin\theta \qquad 7$$

نربع طرفي المعادلة*(7)*

$$\left[\left(\frac{x}{a}\right) - \left(\frac{y}{b}\right)cos\theta\right]^2 = sin^2\theta\left(1 - \left(\frac{y^2}{b^2}\right)\right)$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{xy}{ab}\right)cos\theta + \left(\frac{y^2}{b^2}\right)cos^2\theta = \left(sin^2\theta - \left(\frac{y^2}{b^2}\right)sin^2\theta\right)$$

نختزل هذه المعادلة ونرتبها فتصبح كالأتي

$$\left(\frac{x^2}{a^2}\right) + \left(\frac{y^2}{b^2}\right) - \left(\frac{2xy}{ab}\right)cos\theta = sin^2\theta \qquad 8$$

أن المعادلة *(8)* تمثل المعادلة العامة للقطع الناقص *(Ellipse)* وهذه تمثل شكل المسار الذي يسلكه الجسيم عندما يخضع لتأثير حركتين توافقيتين بسيطتين لهما نفس التردد وسعتين مختلفتين وفرق الطور بينهما θ.
ومن هذه المعادلة يمكن الحصول على أشكال ليساجو لمختلف قيم θ كما يأتي

1.**عندما $\theta = 0, 2\pi$ فان المعادلة (8) تصبح**

$$\{(\frac{x}{a}) - (\frac{y}{b})\}^2 = 0$$

$$y = \left(\frac{b}{a}\right)x \qquad 9$$

هذه المعادلة تشير إلى أن شكل المسار الذي يسلكه الجسيم يكون خطا مستقيما ميله يكون مقدارا موجبا يساوي (b/a) كما في الشكل الآتي (aوz) وهذا يعني أن x و y لهما نفس الإشارة الجبرية دائما. أي أما يكون كلاهما موجبا أو كلاهما سالبا. وهذه الحالة يقابلها في البصريات ما يدعى بالاهتزاز المستقطب خطيا.

2-**عندما تكون $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ فان المعادله 8 تصبح**

$$\left(\frac{x^2}{a^2}\right) + \left(\frac{y^2}{b^2}\right) = 1 \qquad 10$$

وهي معادلة القطع الناقص التي يقع محوراها الأساسيان على امتداد المحورين السيني والصادي. أن اتجاه حركة الجسيم على هذا المسار عندما ($\theta = \pi/2$) يمكن تفسيرها كالأتي: عندما يبدأ الجسيم بالحركة في لحظة زمنية $t=0$ فان x تبدأ بالتناقص من أقصى قيمة موجبة لها، بينما y تبدأ مباشرة بالزيادة من الصفر. وهذا يعني أن المسار الناقص يحدث باتجاه معاكس لاتجاه حركة عقرب الساعة. كما مبين في الشكل الأتي (c). أما إذا كانت الزاوية ($\theta = 3\pi/2$) فان اتجاه حركة الجسيم تكون باتجاه حركة عقرب الساعة كما مبين في الشكل الآتي (g). ويلاحظ أن المعادلة (11) تختزل إلى شكل دائري عندما تصبح $a=b$.

3.**عندما $\theta = \pi$ فان المعادلة (8) تصبح**

$$\{(\frac{x}{a}) + (\frac{y}{b})\}^2 = 0$$

$$y = (-b/a)x \qquad 11$$

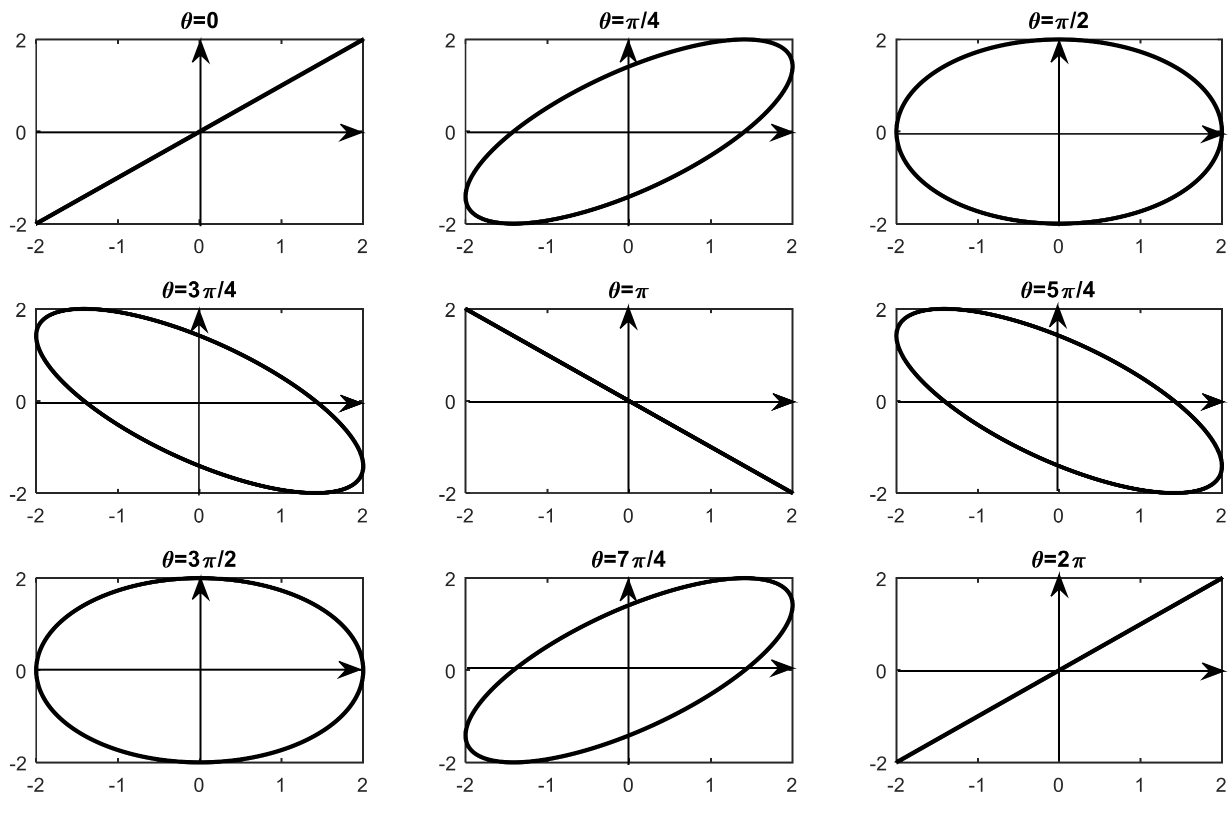
أن هذا الحل يمثل الحالة في الشكل السابق (a) لكن ميل الخط المستقيم هو مقدار سالب يساوي ($-b/a$).

4.عندما $\theta = \pi/4, 7\pi/4$ فان المعادلة (8) تأخذ شكل قطع ناقص مائل.

فعندما تكون$\theta = \pi/4$ فان اتجاه حركة الجسيم يكون معاكسا لاتجاه حركة عقرب الساعة كما مبين في الشكل الأتي (b). والحقيقة أن هذا الشكل يمثل الحالة عندما تكون φ بين صفر و $\pi/2$ وبذلك يكون هذا الشكل وسطا بين الحالتين (a) و (c). أما عندما تكون $\theta = 7\pi/4$ فان اتجاه حركة الجسيم تكون بنفس اتجاه حركة عقرب الساعة كما مبين في الشكل الأتي (h).

5.عندما $\theta = 3\pi/4, 5\pi/4$ فان المعادلة (8) تأخذ أيضا شكل قطع ناقص مائل وتكون محصلة مسار الحركة للجسيم كما مبين في الشكل الآتي (d و f).

أن هذه السلسلة من التغييرات في شكل ليساجو تتكرر بنفس الطريقة في كل زمن دوري. من هذا نستنتج أن محصلة الحركة لتركيب أي حركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين لهما نفس التردد يكون مسارها على شكل قطع ناقص في جميع الحالات، على اعتبار أن الدائرة والخط المستقيم هما حالتان خاصتان من القطع الناقص.



```
%MATLAB code to plot Lissajous figures
t=0:0.001:4*pi;
a=2;
b=2;
theta1=0;
x=a*sin(t+theta1);
y=b*sin(t);
subplot(3,3,1);
plot(x,y,'linewidth',2,'color','k');
title('\theta=0')

theta11=pi/4;
x1=a*sin(t+theta11);
y1=b*sin(t);
subplot(3,3,2);
plot(x1,y1,'linewidth',2,'color','k');
title('\theta=\pi/4')

theta12=pi/2;
x2=a*sin(t+theta12);
y2=b*sin( t);
subplot(3,3,3);
plot(x2,y2,'linewidth',2,'color','k');
title('\theta=\pi/2');

theta13=3*pi/4;
x3=a*sin(t+theta13);
y3=b*sin( t);
subplot(3,3,4);
plot(x3,y3,'linewidth',2,'color','k');
title('\theta=3\pi/4');

theta14=pi;
x4=a*sin(t+theta14);
y4=b*sin( t);
subplot(3,3,5);
plot(x4,y4,'linewidth',2,'color','k');
title('\theta=\pi');

theta15=5*pi/4;
x5=a*sin(t+theta15);
y5=b*sin(t);
subplot(3,3,6);
plot(x5,y5,'linewidth',2,'color','k');
title('\theta=5\pi/4');

theta16=3*pi/2;
x6=a*sin(t+theta16);
y6=b*sin(t);
```

```
subplot(3,3,7);
plot(x6,y6,'linewidth',2,'color','k');
title('\theta=3\pi/2');

theta17=7*pi/4;
x7=a*sin(t+theta17);
y7=b*sin(t);
subplot(3,3,8);
plot(x7,y7,'linewidth',2,'color','k');
title('\theta=7\pi/4');

theta18=2*pi/1;
x8=a*sin(t+theta18);
y8=b*sin(t);
subplot(3,3,9);
plot(x8,y8,'linewidth',2,'color','k');
title('\theta=2\pi');
```

والحركة الفعلية للجسيم أما أن تتم مع اتجاه حركة عقرب الساعة آو في الاتجاه المضاد، ويتوقف ذلك على أي الحركتين تتقدم الأخرى في طورها.

مثال:موجتان تسيران باتجاهين متعامدين متمثلتان بالمعادلتين $x=asin(\omega t-60)$ و $y=asin\omega t$. أوجد محصلتيهما واتجاهما.

الحل:

نلاحظ من المعادلتين إن سعة الموجة الأولى $a=a$ وسعة الموجة الثانية $b=a$ وزاوية الطور الابتدائي للموجة الأولى $\theta_1 = 60^o$ وزاوية الطور الابتدائي للموجة الثانية $\theta_1 = 0^o$ ، إذن زاوية الطور للموجة المحصلة

$$\theta = \theta_1 - \theta_2$$

$$\theta = 60 - 0 = 60^o$$

وباستخدام معادلة المحصلة الناتجة من موجتين متعامدتين

$$(\frac{x^2}{a^2}) + (\frac{y^2}{b^2}) - 2(\frac{xy}{ab})cos\theta = sin^2\theta$$

$$(\frac{x^2}{a^2}) + (\frac{y^2}{b^2}) - 2\left(\frac{xy}{ab}\right)cos60 = sin^2 60$$

$$(\frac{x^2}{a^2}) + (\frac{y^2}{b^2}) - 2(\frac{xy}{ab})(\frac{1}{2}) = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2$$

$$(\frac{x^2}{a^2}) + (\frac{y^2}{a^2}) - (\frac{xy}{a^2}) = (\frac{3}{4})$$

وتمثل معادلة المحصله قطع ناقص ، واتجاه المحصلة باتجاه معاكس لاتجاه عقرب الساعة.

H.W.

مثال:موجتان توافقيتان متعامدتان يتمثلان بالمعادلتين $x=5\sin(2\pi t-5\pi/4)$ و $y=5\sin 2\pi t$. أوجد معادلة محصلة حركتيهما، ماهو الشرط اللازم لكي يكون شكل المحصلة بيضوي (قطع ناقص) محاورها منطبقة على المحورين الأساسيين. وماهو الشرط لكي يكون الشكل دائري.

مثال:اهتزازين متعامدين يمكن وصفهما بالمعادلتين $x=10\cos 5\pi t$ و $y=10\cos(10\pi t+\pi/3)$ ارسم شكل ليساجو للحركة المركبة.

3- تركيب حركتين توافقيتين بسيطتين متعامدتين نسبة ترددهما كنسبة 2 إلى 1

نفرض أن لدينا جسيما يخضع لحركتين توافقيتين متعامدتين تمثلهما المعادلتين

$$x = a\sin(2\omega t + \theta) \qquad (1)$$

$$y = b\sin\omega t \qquad (2)$$

نحاول الآن ربط المعادلتين بالتخلص من الزمن t. من المعادلة (2) نحصل على

$$(\frac{y}{b}) = \sin\omega t \qquad (3)$$

ومن المعادلة ($\sin^2\omega t+\cos^2\omega t=1$) نجد أن

$$\cos\omega t = \sqrt{(1 - \sin^2\omega t)}$$

$$\cos\omega t = \sqrt{(1 - (\frac{y^2}{b^2}))} \qquad (4)$$

ومن المعادلة (1) نحصل على

$$\left(\frac{x}{a}\right) = \sin(2\omega t + \theta) = \sin 2\omega t\cos\theta + \cos 2\omega t\sin\theta \qquad (5)$$

لكن ($sin2\omega t=2sin\omega tcos\omega t$) و ($cos2\omega t=1\text{-}2sin^2\omega t$) وبالتعويض في المعادلة (5) نجد أن

$$\left(\frac{x}{a}\right) = 2sin\omega t\ cos\omega t\ cos\theta + (1 - 2sin^2\omega t)sin\theta \qquad (6)$$

بتعويض المعادلتين (3) و (4) في المعادلة (6) نحصل على

$$(\frac{x}{a}) = 2(\frac{y}{b})(1 - (\frac{y^2}{b^2}))^{1/2}cos\theta + (1 - (2(\frac{y^2}{b^2}))sin\theta \qquad (7)$$

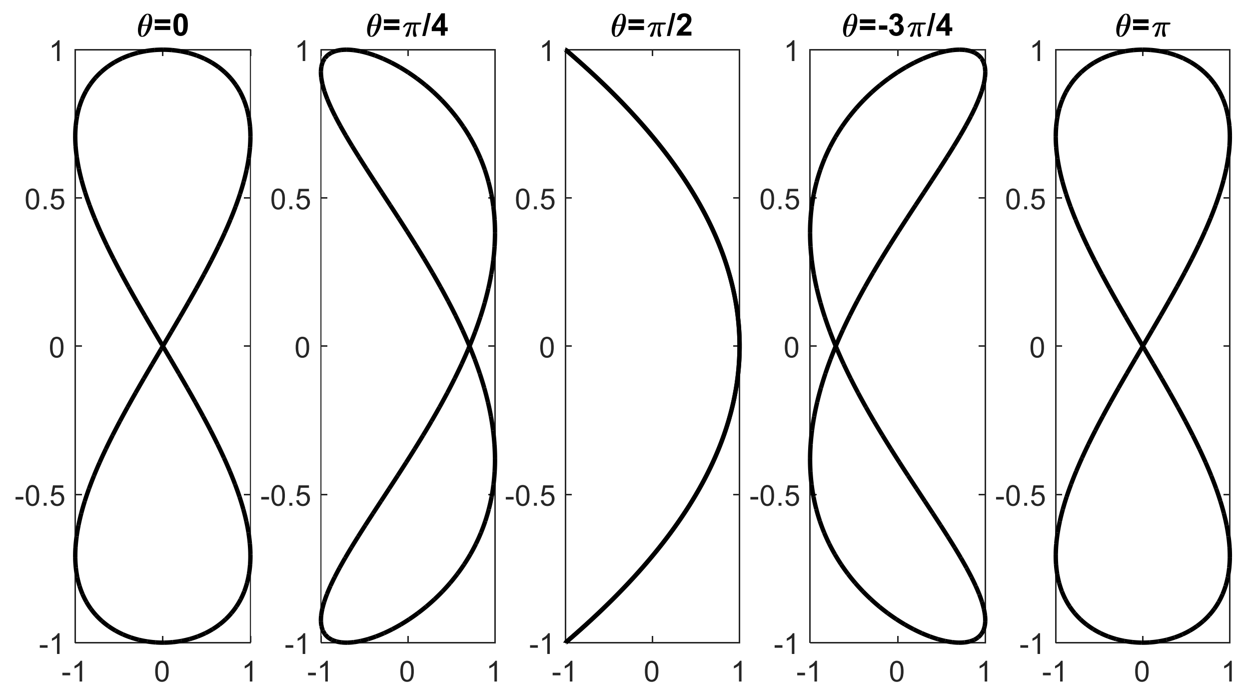
نرتب المعادلة (7) فتصبح

$$\{(\frac{x}{a}) - (1 - (2(\frac{y^2}{b^2}))sin\theta\} = 2(\frac{y}{b})\sqrt{(1 - (\frac{y^2}{b^2}))}\,cos\theta \qquad (8)$$

نربع طرفي المعادلة (8) ونبسط الحدود فتصبح المعادلة الناتجة كالآتي

$$\{(\frac{x}{a}) - sin\theta\}^2 + (4(\frac{y^2}{b^2}))\{(\frac{y^2}{b^2}) + (\frac{x}{a})sin\theta - 1\} = 0 \qquad (9)$$

أن هذه المعادلة العامة للمنحني الذي يحتوي على حلقتين مغلقتين وهي تحدد شكل المسار الذي يسلكه الجسيم لمختلف قيم θ والشكل (1) الآتي يوضح أشكال المنحنيات التي نحصل عليها عندما تأخذ θ القيم $(\pi, 3\pi/4, \pi/2, \pi/4, 0)$



س: ما هي فوائد ليساجو عمليا؟

ج:تعتبر أشكال ليساجو وسيلة لمقارنة ترددين أو الزمن الدوري لحركتين توافقيتين. ولذلك يمكن استخدامها لإيجاد قيمة التردد المجهول إذا توفر لدينا تردد معلوم. وتفيد أيضا في الكشف عن التغير في طور الحركة الناتجة من تركيب اهتزازيين متعامدين. وهناك طرق عملية عديدة للحصول على أشكال ليساجو منها طرق ميكانيكية وأخرى بصرية إلا أن أهمها على الإطلاق هي الطريقة الالكترونية باستخدام راسم ذبذبات الأشعة المهبطية.

```
%MATLAB code to plot Lissajous figures with 2*wt.
t=0:0.001:2*pi;
x=sin((2*t)+0);
y=sin(t);
 subplot(1,5,1);
plot(x,y,'linewidth',3,'color','k');
title('\theta=0')
x1=sin((2*t)+(pi/4));
y1=sin(t);
subplot(1,5,2);
plot(x1,y1,'linewidth',3,'color','k');
title('\theta=\pi/4')
x2=sin((2*t)+(pi/2));
y2=sin(t);
subplot(1,5,3);
plot(x2,y2,'linewidth',3,'color','k');
title('\theta=\pi/2')
x3=sin((2*t)+((-3*pi)/4));
y3=sin(t);
subplot(1,5,4);
plot(x3,y3,'linewidth',3,'color','k');
title('\theta=-3\pi/4')
x4=sin((2*t)+(pi));
y4=sin(t);
subplot(1,5,5);
plot(x4,y4,'linewidth',3,'color','k');
title('\theta=\pi')
```

سؤال:اثبت أن المعادلة

$$(\frac{x}{a}) - (1 - (2(\frac{y^2}{b^2}))sin\theta = 2(\frac{y}{b})\sqrt{(1 - (\frac{y^2}{b^2}))}\, cos\theta$$

تحقق المعادله التاليه

$$\left(\left(\frac{x}{a}\right) - sin\theta\right)^2 + \left(\frac{2y}{b}\right)^2 \left[\left(\frac{x}{a}\right) sin\theta + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1\right] = 0$$

الحل

بتربيع الطرفين نجد ان

$$\left[\left(\frac{x}{a}\right) - (1 - (2(\frac{y^2}{b^2}))sin\theta\right]^2 = \left[2(\frac{y}{b})\sqrt{(1 - (\frac{y^2}{b^2}))}\, cos\theta\right]^2$$

$$\left[\left(\frac{x}{a}\right) - sin\theta + (2\frac{y^2}{b^2})sin\theta\right]^2 = 4(\frac{y}{b})^2(1 - (\frac{y^2}{b^2}))\, cos^2\theta$$

$$\left[\left(\left(\frac{x}{a}\right) - sin\theta\right) + (2\frac{y^2}{b^2})sin\theta\right]^2 = (\frac{2y}{b})^2 cos^2\theta - (\frac{2y}{b})^4\, cos^2\theta$$

$$\left(\left(\frac{x}{a}\right) - sin\theta\right)^2 + 4\left(\left(\frac{x}{a}\right) - sin\theta\right)\left(\frac{y^2}{b^2}\right)sin\theta + 4(\frac{y}{b})^4\, sin^2\theta = (\frac{2y}{b})^2 cos^2\theta - \left(\frac{2y}{b}\right)^4\, cos^2\theta$$

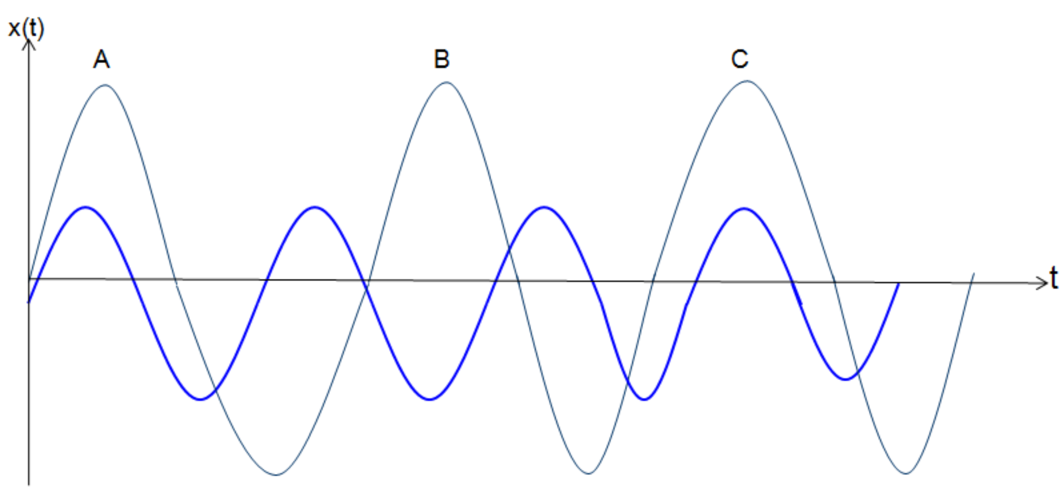
$$\left(\left(\frac{x}{a}\right) - sin\theta\right)^2 + 4\left(\frac{xy^2}{ab^2}\right)sin\theta + 4\left(\frac{y}{b}\right)^4 (sin^2\theta + cos^2\theta) = \left(\frac{2y}{b}\right)^2 (cos^2\theta + sin^2\theta)$$

$$\left(\left(\frac{x}{a}\right) - sin\theta\right)^2 + 4\left(\frac{xy^2}{ab^2}\right)sin\theta + 4\left(\frac{y}{b}\right)^4 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2 = 0$$

$$\left(\left(\frac{x}{a}\right) - sin\theta\right)^2 + \left(\frac{2y}{b}\right)^2\left[\left(\frac{x}{a}\right)sin\theta + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1\right] = 0$$

الضربات أو تركيب اهتزازيين مختلفين قليلا في التردد

عندما يتأثر جسيم آنيا بحركتين توافقيتين بسيطتين الفرق بين ترددهما قليل فان سعة الحركة الاهتزازية الناتجة للجسيم تتناوب بين نهايتين عظمى وصغرى مع مرور الزمن وهذا النمط من الحركة الدورية يدعى بظاهرة الضربات (*Beats Phenomena*). فعندما تحدث الحركتان التوافقيتان على امتداد محور معين، فنتيجة للاختلاف الضئيل بين ترددهما يحدث تغير تدريجي في فرق الطور بين الحركتين مع مرور الزمن. وفي لحظة زمنية معينة كتلك المقابلة للنقطة A في الشكل (1) تكون الحركتين بنفس الطور أي تحدث الإزاحتان بنفس الاتجاه وبذلك تكون سعة الحركة الاهتزازية في ذروتها، وهذا يمثل التداخل البناء، حيث تكون محصلة الإزاحة للجسيم في تلك اللحظة مساوية لمجموع الإزاحتين. وعندما يمر الزمن فان الحركتين تخرجان عن الطور ويزداد فرق الطور بينهما حتى يصبح $\pi(180^o)$ كما مبين في اللحظة الزمنية المقابلة للنقطة B في الشكل (1) حيث تكون الإزاحتان متعاكستين وتحاول كل منهما إبطال الأخرى وبذلك تكون سعة الحركة الاهتزازية في تلك اللحظة في أدنى قيمة لها، وهذا يمثل التداخل الهدام حيث تكون محصلة الإزاحة للجسيم مساوية للفرق بين الإزاحتين. ومع مرور الزمن يزداد فرق الطور بين الحركتين حتى يصبح 2π كما مبين في اللحظة الزمنية المقابلة لـC ويحدث التداخل البناء مرة أخرى ثم يعقبه بعد فترة زمنية معينة تداخل هدام. وهكذا تتكرر العملية وتتناوب محصلة سعة الحركة الإهتزازية بين أقصى وأدنى قيمة لها مع مرور الزمن بتردد ثابت يدعى تردد الضربات ويساوي الفرق بين ترددي الحركتين التوافقيتين.



ويمكن توضيح ذلك تحليليا كالآتي. نفرض أن لدينا جسيما في وسط يتذبذب تحت تأثير حركتين توافقيتين بسيطتين مختلفتين قليلا في التردد. ونتيجة لاختلاف الترددين فان فرق الطور بين الحركتين يتغير باستمرار ولذلك فانه ليس مهما في هذه الحالة تحديد قيمة ابتدائية لفرق الطور بين الحركتين. فإذا كانت الإزاحة الآنية للجسيم في الزمن t بسبب تأثير الحركة التوافقية الأولى التي سعتها A_1 وترددها f_1 هي x_1 حيث

$$x_1 = A_1 sin\omega_1 t = A_1 sin 2\pi f_1 t \qquad (1)$$

والإزاحة الآنية لنفس الجسيم في نفس اللحظة الزمنية t نتيجة تأثير الحركة التوافقية الثانية التي سعتها A_2 وترددها f_2 هي x_2 حيث

$$x_2 = A_2 sin\omega_2 t = A_1 sin 2\pi f_2 t \qquad (2)$$

إن محصلة الإزاحة x في الزمن t تنتج من تركيب الحركتين، أي أن

$$x = x_1 + x_2$$

$$x = A_1 sin\omega_1 t + A_2 sin\omega_2 t \qquad (3)$$

أن تأثير الضربات يمكن تحليله بسهولة إذا اعتبرنا الحركتين لهما نفس السعة، أي إذا افترضنا $(A=A_1=A_2)$، وبذلك تصبح المعادلة كالآتي

$$x = A sin\omega_1 t + A sin\omega_2 t \qquad (4)$$

$$x = 2A cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2})t \, sin(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2})t \qquad (5)$$

أن هذه المعادلة تشير إلى نتيجة رياضية بحتة وعامة لكل قيم ω_1 و ω_2 ولكن وصفها لظاهرة الضربات لا يتحقق إلا إذا كان الفرق بين ω_1 و ω_2 قليلا. أي أن

$$f_2 - f_1 = \Delta f \qquad (6)$$

حيث Δf لا يتجاوز $10Hz$. وهذا يتوقف على الفاصل الزمني بين أي ضربتين متتاليتين وقدرة الأذن البشرية على تمييز ذلك. أن المعادلة (5) يمكن تمثيلها بيانيا كما مبين في الشكل (2) فالجزء (a اللون الأحمر) يمثل الحركة التوافقية الأولى التي ترددها f_1 والجزء (b اللون الأزرق المنقط) يمثل الحركة التوافقية الثانية التي ترددها f_2 والجزء (c) يمثل محصلة تركيب الحركتين الذي يتضمن ترددين الأول عال يقع ضمن الغلاف المنقط والثاني تردد واطئ يمثله الغلاف المنقط ذاته. ويلاحظ في هذا الشكل أن السعة تتغير جيبيا، وهذه الظاهرة معروفة باسم تعديل أو تضمين السعة وهي ذات أهمية عملية في عملية الاتصالات الكهرومغناطيسية والالكترونية فضلا عن الصوتيات.

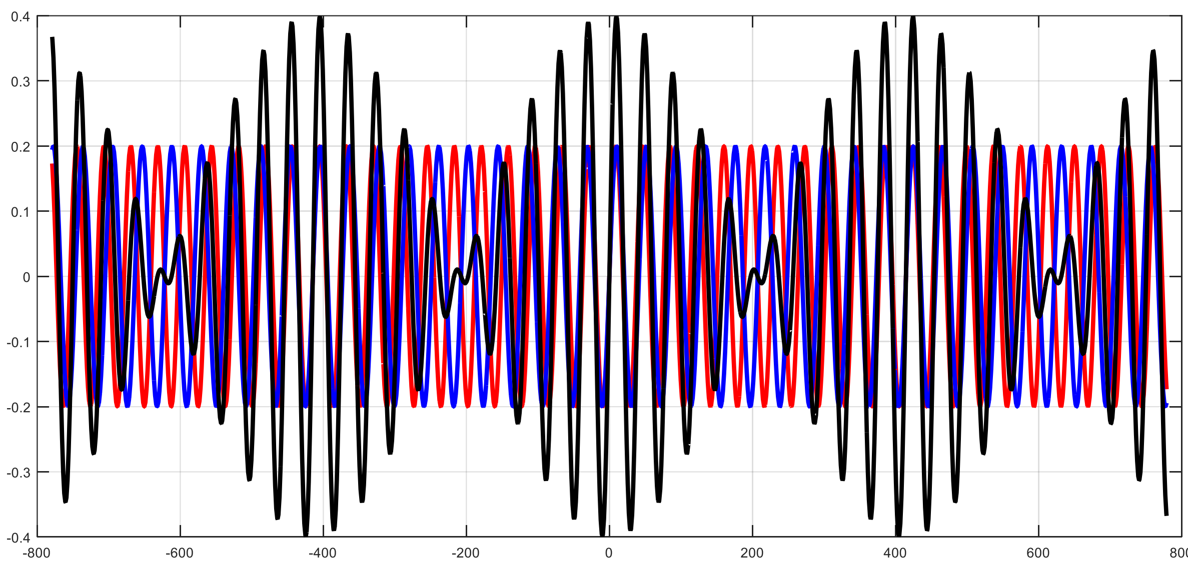
أن التفسير الفيزيائي للمعادلة (5) يمكن إعطاؤه بسهولة إذا وضعناها بالصيغة الآتية

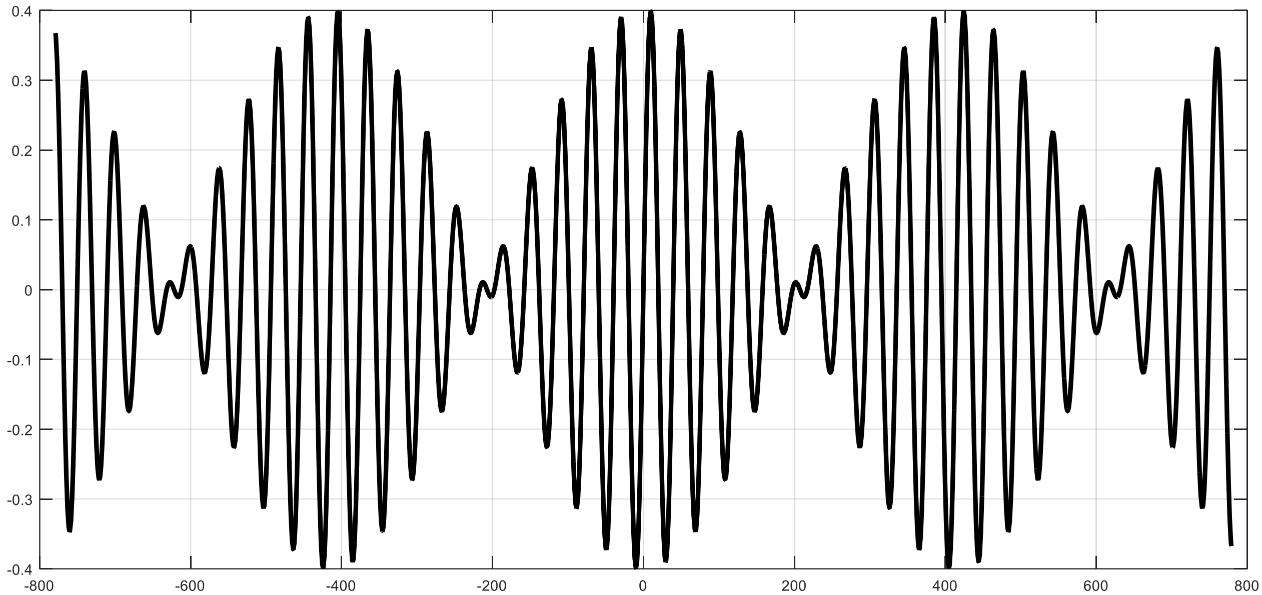
$$x = Bsin(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2})t \qquad (7)$$

حيث

$$B = 2Acos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2})t \qquad (8)$$

فالمعادلة (7) تمثل حركة دورية سعتها B وتتذبذب بتردد عال، وهذا التردد يساوي المتوسط الحسابي للترددين الأصليين أي $(f_1+f_2/2)$ والذي يمثل التردد الفعلي لمحصلة الحركة ويقع ضمن الغلاف المنقط المبين في الشكل (2). والعامل المتذبذب $sin(\omega_2+\omega_1/2)t$ تقع قيمته دائما بين الحدين ± 1. والمعادلة (8) تعطي سعة الحركة B. ويلاحظ أنها تتغير دوريا مع الزمن.





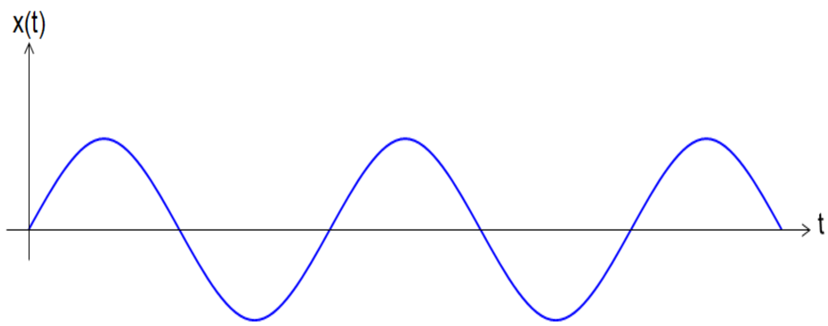

```
% MATLAB code to plot beats
t=-248*pi:0.001:248*pi;
a=0.2;
b=0.2;
f1=t/6;
f2=t/(6*1.1);
x1=a*sin(f1);
x2=b*sin(f2);
x3=x1+x2;
  plot(t,x1,'linewidth',2,'color','r');
hold on
  plot(t,x2,'linewidth',2,'color','b');
hold on
plot(t,x3,'linewidth',2,'color','k');
grid on
```

الفصل الرابع

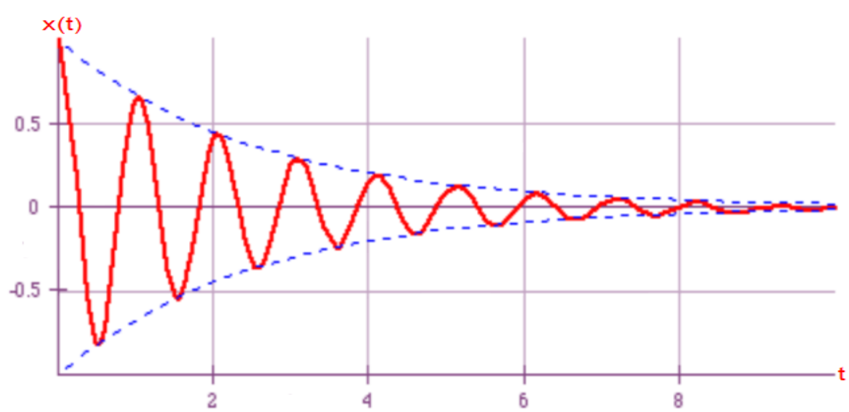
الاهتزاز المضمحل

مقدمة

لقد اعتبرنا في دراستنا للحركة التوافقية البسيطة في الفصل الثاني أن الاهتزاز حر وغير مضمحل (*Damped*). وهو الاهتزاز الحاصل من إزاحة الجسيم قليلا عن موضع توازنه ومن ثم تركه يهتز بصورة حرة تحت تأثير قوة الاستعادة الناتجة من خاصية المرونة فقط، دون أن يعاني أي مقاومة خارجية آو تبديد في الطاقة مهما كان شكله. ونتيجة ذلك فان سعة الحركة الاهتزازية تبقى ثابتة مما يعني أن الاهتزاز يستمر دون توقف مع مرور الزمن كما مبين في الشكل (1).



وفي الحقيقة أن مثل هذا الاهتزاز يمثل حالة مثالية تماما إذ لا يوجد مهتز حقيقي يستمر على الاهتزاز الحر إلى الآبد. وفي الواقع أن أي مهتز حقيقي لابد أن يعاني شيئا من الفقدان في الطاقة بشكل آو بآخر. ونتيجة ذلك فان سعة الحركة الاهتزازية تتضاءل تدريجيا مع مرور الزمن كما مبين في الشكل (2). أن مثل الاهتزاز يدعى بالاهتزاز المضمحل الذي يمثل حالة أكثر واقعية من الاهتزاز غير المضمحل.



القوى المسببة لاضمحلال الاهتزاز

بصورة عامة يمثل الاهتزاز بحد ذاته شكلا من الضياع بالطاقة غير مرغوب فيه في كثير من الأحيان لأسباب متعددة، منها على سبيل المثال انه قد يكون سببا في انهيار الأجزاء المهتزة، أو في توليد أصوات مزعجة أو في نقل قوى وحركات غير مطلوبة إلى أجزاء أو أجسام أخرى قريبة. لهذا السبب يمكن اعتبار أن الطاقة المصاحبة للاهتزاز تستهلك بشكل أو بأخر. وفي الواقع أن كل جسيم مهتز يجابه نوعا من القوى المقاومة لحركته والتي تؤدي إلى اضمحلال حركته الاهتزازية تدريجيا مع الزمن وقد يكون مقدار هذه القوى من الكبر مالا يسمح بحدوث الاهتزاز أصلا. ومن الصعب وصف القوى الحقيقية المؤدية إلى تبديد الطاقة المصاحبة للاهتزاز. إلا انه بالتأكيد يمكن حصر القوة المقاومة لحركة الجسيم المهتز بعامل أو أكثر من عوامل الاضمحلال التي قد تكون ناتجة من لزوجة المائع (كالهواء أو السائل) الذي يتحرك خلاله الجسيم المهتز أو الاحتكاك الداخلي بين الجزيئات التي تعاني حركة نسبية نتيجة الاهتزاز أو قوى كهربائية ستاتيكية كتلك الناتجة عن الاحتكاك الجاف (احتكاك كولومب لتوليد الشحنات الساكنة) أو قوى محتثة ناتجة من الحث الكهرومغناطيسي المتولد بسبب اهتزاز المهتز الذي يحتوي مواد قابلة للتمغنط قرب مغناطيس طبيعي أو كهربائي. إن واحدا أو أكثر من هذه العوامل أو غيرها موجود دائما في أي عملية اهتزاز، لذلك فان شغلا يجب أن يصرف دائما للتغلب عليها، وهذا الشغل المصروف يتبدد تدريجيا على شكل حرارة مفقودة إلى الوسط المحيط بالمهتز. إن هذا التضاؤل في السعة يعرف بالاضمحلال أو التبديد في الطاقة. ومثل هذه الحركة الاهتزازية تدعى بالحركة التوافقية المضمحلة. إن جميع المهتزات في الطبيعة التي تهتز اهتزازا حرا تعاني هذا النوع من الاهتزاز ولكن بدرجات متفاوتة. فالبندول البسيط المهتز في الهواء يعاني مقاومة قليلة نسبيا لذلك فان سعته تتضاءل تدريجيا بمقدار ضئيل وعليه يستمر على الاهتزاز لفترة طويلة نسبيا إذا ما ترك يهتز اهتزازا حرا. ولكن إذا ما غمر البندول المهتز في الماء فان المقاومة التي يعانيها تصبح كبيرة لذلك فان سعته تتضاءل بمقدار ملحوظ تماما وعليه فانه يتوقف عن الاهتزاز بعد فترة قصيرة جدا، أما إذا غمر في سائل عالي اللزوجة كالعسل مثلا فانه لا يهتز بل يرجع إلى موضع توازنه الأصلي إذا ما أزيح عن ذلك الموضع وترك حرا. ونفس الشيء يحدث لأي مهتز آخر إذا ما تعرض إلى نفس الشروط.

والحقيقة إن أي جسم يهتز في وسط ما كالهواء مثلا يفقد بالضرورة طاقة. فأثناء عملية الاهتزاز فان جزيئات الهواء المحيطة به تهتز أيضا والطاقة الاهتزازية التي اكتسبتها هذه الجزيئات تمثل جزء من الطاقة التي فقدها الجسم المهتز. والحقيقة إن الصوت المنبعث من أي جسم مهتز كالشوكة الرنانة مثلا يمثل الطاقة الاهتزازية المنقولة عبر الهواء إلى آذاننا وهذه الطاقة تمثل شكلا من أشكال الطاقة المستنزفة من الجسم المهتز.

ولغرض دراسة الاهتزاز المضمحل دراسة وافية لابد من اخذ كل قوى التبديد في الاعتبار، ولكن ليس من السهل حصر كل عوامل التبديد بالطاقة خاصة وان قوى التبديد قد تعتمد على عوامل عديدة ومختلفة مثل الإزاحة، السرعة، الإجهاد ... الخ. لذلك ستقتصر دراستنا في هذا الفصل على اعتبار أكثر العوامل بروزا في إحداث الاضمحلال في حركة المهتز. وهذا العامل ناتج من مقاومة المائع بسبب لزوجته لحركة الجسيم.

إن مقدار المقاومة التي يبديها المائع لحركة الجسيم تعتمد على سرعة الجسيم وشكله وخواص المائع. وبالنسبة لجسيم ما يتحرك في مائع معين تختلف العلاقة بين قوة مقاومة المائع لحركة الجسيم باختلاف السرعة. فعند السرع العالية يكون مقدار القوة المقاومة متناسب طرديا مع مربع السرعة تقريبا. وعند السرع الواطئة أو الاعتيادية يكون مقدار القوة المقاومة F_R متناسب خطيا مع السرعة الآنية v للجسيم المهتز. ويمكن التعبير عن ذلك رياضيا بالتناسب

$$F_R \alpha v$$

ومن هذا التناسب ينتج أن

$$F_R = -Rv \qquad (1)$$

حيث R يمثل ثابت التناسب ويدعى بثابت المقاومة أو ثابت الاضمحلال. والإشارة السالبة تشير إلى أن اتجاه القوة المقاومة يكون دائما معاكسا لاتجاه حركة الجسم. وهذا يعني أن هذه القوة تحاول دائما إبطاء حركة الجسيم المهتز.

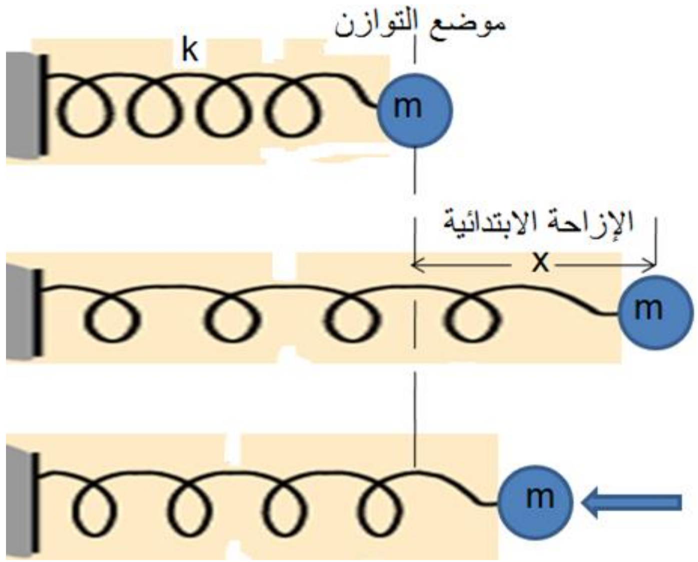
ويمكن أن نعبر عن السرعة الآنية v للجسيم بالمقدار dx/dt إذا كان الجسيم يتحرك باتجاه المحور السيني، وتصبح المعادلة (1) كالاتي

$$F_R = -R(\frac{dx}{dt}) \qquad (2)$$

إن العلاقة الخطية إلى جانب كونها تمثل حالة ليست بعيدة عن الواقع فإنها تقود إلى ابسط التحليلات الرياضية فيما يتعلق بالاهتزاز المضمحل، لذلك ستقتصر دراستنا في هذا الفصل على اعتبار إن القوة المقاومة التي يعانيها الجسيم المهتز والناجمة عن اللزوجة أو الاحتكاك تتناسب طرديا مع السرعة الآنية للجسيم.

معادلة الحركة التوافقية المضمحلة

سنعتبر هنا حركة المهتز المؤلف من جسيم كروي كتلته m متصل بنابض حلزوني ثابت مرونته k ومثبت طرفه بأحكام بمسند ثابت كما مبين في الشكل (3).



الشكل (3) يبين مهتز توافقي تؤثر عليه قوتان هما قوة الاستعادة وقوة مقاومة المائع

عندما تزاح الكتلة m إزاحة صغيرة مقدارها x فان قوة استعادة تظهر مقدارها $(-kx)$، وحينما تترك الكتلة فأنها تتحرك للعودة إلى موضع توازنها وخلال حركتها تعاني قوة مقاومة ناتجة من الاحتكاك أو لزوجة المائع ومقدار هذه القوة هو $(-R(dx/dt))$ حيث الإشارة السالبة تشير إلى أن اتجاه هذه القوة يعاكس دائما اتجاه السرعة النسبية للكتلة المهتزة. أن محصلة القوة المؤثرة على الكتلة المتحركة في أية لحظة زمنية t هي $\left(\left(-R\left(\frac{dx}{dt}\right)\right) - kx\right)$ والآن نطبق قانون نيوتن الثاني في الحركة فينتج

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = -R\left(\frac{dx}{dt}\right) - kx \qquad (1)$$

نقسم طرفي المعادلة (1) على m ونرتب الحدود فتصبح

$$(\frac{d^2x}{dt^2}) + (\frac{R}{m})(\frac{dx}{dt}) + (\frac{k}{m})x = 0 \qquad (2)$$

ولتسهيل شكل الحل للمعادلة (2) نفرض أن $2r=R/m$، ولما كانت $\omega^2=k/m$ فان المعادلة (2) تصبح

$$(\frac{d^2x}{dt^2}) + 2r\left(\frac{dx}{dt}\right) + w^2x = 0 \qquad (3)$$

هذه هي المعادلة التفاضلية للحركة التوافقية الحرة المضمحلة، ويلاحظ أنها معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية.

حل معادلة الحركة التوافقية المضمحلة

بالنظر لعدم إجراء تكامل مباشر للمعادلة (3) لذلك يجب البحث عن الحل المناسب بطريقة أخرى. وبالتخمين نجد أن الحل المطلوب يجب أن يكون دالة تعطي نفس الشكل الرياضي لكل الحدود فيها. والدالة المناسبة لذلك هي الدالة التي يكون شكل المشتقة الأولى والثانية لها مشابها تماما للدالة ذاتها. والدالة الرياضية التي تتوفر فيها هذه الشروط هي الدالة الآسية $e^{\alpha t}$، وعليه يمكن أن نفرض أن الحل المناسب هو

$$x = De^{\alpha t} \qquad (1)$$

حيث D ثابت اختياري، نعوض هذا الحل في المعادلة (3) في الفقرة السابقة، فينتج

$$\left(\frac{d^2De^{\alpha t}}{dt^2}\right) + 2r\left(\frac{dDe^{\alpha t}}{dt}\right) + w^2De^{\alpha t} = 0$$

$$\alpha^2De^{\alpha t} + 2r\alpha De^{\alpha t} + \omega^2De^{\alpha t} = 0 \qquad (2)$$

والمعادلة (2) تصبح

$$De^{\alpha t}\,(\alpha^2 + 2r\alpha + \omega^2) = 0 \qquad (3)$$

وهذا يعني أما $De^{\alpha t}=0$ وهذا غير ممكن لأنه يمثل الحل المفروض ولا يساوي صفرا إلا إذا كانت قيمة المتغير t تساوي مقدارا سالبا لانهائيا في الكبر. أو أن $\alpha^2+2r\alpha+\omega^2=0$ والطريقة المناسبة لحل هذه المعادلة هي باستخدام الدستور

$$\alpha = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (4)$$

وبالتعويض نجد أن

$$\alpha = \frac{-2r \pm \sqrt{(4r^2 - 4\omega^2)}}{2} \qquad (5)$$

أن المعادلة (5) تشير إلى أن هنالك حلين للمعادلة هما

$$\alpha_1 = -r + \sqrt{(r^2 - \omega^2)}$$

$$\alpha_2 = -r - \sqrt{(r^2 - \omega^2)}$$

وبتعويض النتيجتين السابقتين في المعادلة (1) نجد أن الحل العام لمعادلة الحركة هو

$$x = D_1 e^{\alpha_1 t} + D_2 e^{\alpha_2 t} \qquad (6)$$

أي أن

$$x = D_1 e^{-r+\sqrt{(r^2-\omega^2)}t} + D_2 e^{-r-\sqrt{(r^2-\omega^2)}t} \qquad (7)$$

حيث أن D_1 و D_2 يمثلان ثابتين اختياريين يمكن ايجادهما من الشروط الابتدائية للحركة. ومعلوم أن الحل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبة الثانية يجب أن يتضمن ثابتين اختياريين. أن التفسير الفيزيائي للمعادلة (7) يشير إلى وجود أربع حالات للحركة كل منها يعتمد على قيمة r بالنسبة لـω وهذه الحالات هي

1. **<u>الحالة الأولى: وهي تمثل حالة انعدام الاضمحلال ($r=0$)</u>**

وهذه الحالة تعني أن المقاومة التي يعانيها المهتز خلال حركته معدومة تماما أي أن ($R=0$) وهذه الحالة تقابل الحركة التوافقية البسيطة غير المضمحلة. في هذه الحالة يصبح الحل للمعادلة (7) كالآتي

$$x = D_1 e^{+\sqrt{-\omega^2}t} + D_2 e^{-\sqrt{-\omega^2}t} \qquad (8)$$

$$x = D_1 e^{+i\omega t} + D_2 e^{-i\omega t} \qquad (9)$$

حيث أن i يمثل عدد خيالي ويساوي $\sqrt{-1}$. ولكن لدينا

$$e^{i\omega t} = coswt + i\, sinwt \qquad (10)$$

$$e^{-i\omega t} = coswt - i\, sinwt \qquad (11)$$

نعوض المعادلتين (10) و (11) في المعادلة (9) فنجد أن

$$x = D_1(cos\omega t + isin\omega t) + D_2(cos\omega t - isin\omega t)$$

$$x = (D_1 + D_2)cos\omega t + i(D_1 + D_2)sin\omega t \qquad (12)$$

فإذا فرضنا أن $A=(D_1+D_2)$ و $B=i(D_1-D_2)$ فبالتعويض في المعادلة (12) نجد أن الحل الأخير يصبح

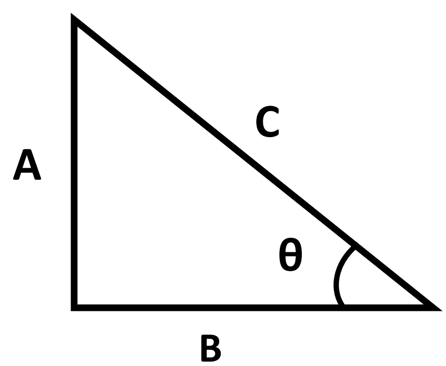
$$x = Acos\omega t + Bsin\omega t \qquad (13)$$

وهذا الحل يمكن تبسيطه أكثر إذا ضربنا وقسمنا الطرف الأيمن على المقدار C، حيث $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ وان $tan\theta = \frac{A}{B}$ فعندئذ يصبح الحل الأخير كالآتي

$$x = C\{(A/C)cos\omega t + (B/C)sin\omega t\}$$

$$x = C(sin\theta cos\omega t + cos\theta sin\omega t)$$

$$x = Csin(\omega t + \theta) \qquad (14)$$



حيث أن θ تمثل زاوية الطور الابتدائي للحركة وتساوي $arctan(A/B)$. إن هذه المعادلة تمثل الحركة التوافقية البسيطة وتشير إلى أن سعة الحركة خلال الاهتزاز تبقى ثابتة مع مرور الزمن.

2.الحالة الثانية: وهي تمثل حالة الحركة الناقصة الاضمحلال ($r^2<\omega^2$)

هذه الحالة تعني أن المقاومة التي يعانيها المهتز خفيفة أي أن الاضمحلال في الاهتزاز قليل نسبيا فعندما يكون معامل الاضمحلال r صغيرا بالمقارنة مع التردد الزاوي ω فان المقدار تحت الجذر $(r^2-\omega^2)^{1/2}$ يكون سالبا وبالتالي يكون الجذر مقدار خيالي. ونفرض انه في حالة $r<\omega$ أن $(r^2-\omega^2)^{1/2}=i\omega_o$، حيث أن ω_o تمثل التردد الزاوي المضمحل. نعوض في المعادلة (7) فيصبح الحل كالآتي

$$x = D_1 e^{(-r+iw_o)t} + D_2 e^{(-r-iw_o)t}$$

$$x = e^{-rt}(D_1 e^{iw_o t} + D_2 e^{-iw_o t}) \qquad (15)$$

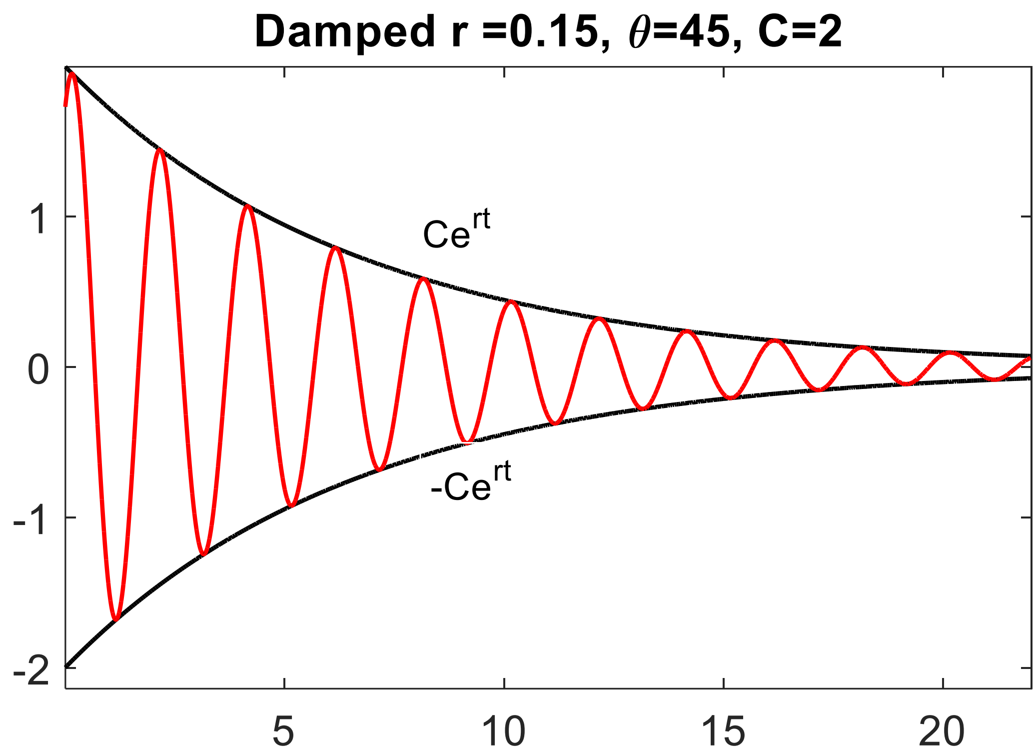
وبنفس الطريقة التي تم إتباعها في الحالة الأولى تماما يمكن إثبات أن

$$D_1 e^{iw_o t} + D_2 e^{-iw_o t} = C sin(w_o t + \theta) \qquad (16)$$

وبذلك يصبح الحل العام في هذه الحالة كالآتي

$$x = Ce^{-rt} sin(w_o t + \theta) \qquad 17)$$

حيث أن C,θثابتان اختياريان يمكن إيجاد قيمتهما من الشروط الابتدائية للحركة. أن هذه المعادلة تمثل الحركة التوافقية البسيطة المضمحلة ويمكن تمثيلها بيانيا كما مبين في الشكل (4).



الشكل (4) يبين منحني الإزاحة والزمن في الاهتزاز المضمحل

```
% MATLAB code to plot damped figures
t=0:0.001:7*pi;
c=2;
r=0.15;
theta=45;
a=exp(-r*t);
x=c*a;
x1= c*(sin((t*pi)+theta)).*a;
plot(t,x,'linewidth',2,'color','k');
hold on
plot(t,-x,'linewidth',2,'color','k');
hold on
plot(t,x1,'linewidth',2,'color','r');
title('Damped r =0.15, \theta=45, C=2' )
```

في الشكل السابق يتضح أن سعة الحركة تتضاءل مع الزمن. وهذه السعة يمكن تحديدها عندما تكون قيمة $sin(\omega_o t+\theta)$ في أقصى قيمة لها، أي عندما $sin(\omega_o t+\theta)=\pm 1^*$ وبذلك تكون السعة الفعالة للحركة هي $\pm Ce^{-rt}$. ويلاحظ أنها مقدار متغير ويعتمد على عامل الاضمحلال r والزمن t. وهذه تشير إلى أن السعة تتناقص أسيا مع الزمن حتى تنعدم عندما تكون قيمة t مالانهاية. إن هذه الحالة تعني أن المقاومة التي يعانيها المهتز قليلة لدرجة تسمح بحدوث اهتزازات حول موضع التوازن، على الرغم من سعة هذه الاهتزازات تتناقص مع الزمن كما هو مبين في الشكل السابق. أن الفرق في الزمن الذي يفصل بين قمتين (أو قعرين) متتاليين يسمى الزمن الدوري للاهتزاز الحر المضمحل ويرمز له عادة بالرمز T_o ويمكن إيجاده من العلاقة

$$\sqrt{(r^2-\omega^2)} = i\omega o$$

التي منها نجد أن

$$\omega_o = \sqrt{(\omega^2 - r^2)} \qquad (18)$$

وحيث أن $\omega_o=2\pi/T_o$ لذلك فان

$$T_o = \frac{2\pi}{\sqrt{(\omega^2 - r^2)}} \qquad (19)$$

وبالمقارنة مع الزمن الدوري للاهتزاز الحر غير المضمحل $T=2\pi/\omega$ نجد أن T_o تكون دائما اكبر من T وهذا يعني أن المقاومة التي يعانيها الجسيم المهتز تعمل على إبطاء حركته، وكلما ازدادت المقاومة الاحتكاكية المقاسة بدلالة معامل الاضمحلال r ازداد طول الزمن الدوري T_o، حتى إذا أصبحت قيمة r مساوية لقيمة ω أصبح طول الزمن الدوري T_o مالانهاية من الكبر مما يعني أن الحركة لن تكون اهتزازية على الإطلاق بل أن الجسيم سيعود إلى موضع توازنه الأصلي إذا ترك حرا بعد أي إزاحة ابتدائية. مما تقدم يتضح أن وجود مقاومة قليلة أمام أي مهتز يؤدي إلى اضمحلال الاهتزاز وهذا يظهر على شكل تأثيرين أولهما تناقص تدريجي في السعة وثانيهما زيادة في طول الزمن الدوري وهذان التأثيران مرتبطان بالمعادلتين (17) و (19). إن هذا النوع من الاهتزاز يمثل اغلب حالات الاهتزاز في الطبيعة، وفيه تتبدد الطاقة تدريجيا نتيجة المقاومة التي يعانيها المهتز حتى تنعدم الحركة ويتوقف تماما عن الاهتزاز.

عندما $sin(\omega_o t+\theta)=\pm 1^*$ فان المنحني المتذبذب (الخط البياني المتصل) في الشكل السابق يتلامس مع المنحني الآسي Cr^{-rt} (الخط البياني المنقط) في نقاط لا تتطابق مع مواقع أقصى قيم السعة بل تميل قليلا نحو اليمين، ولذلك لا تكون المماسات في تلك النقاط في وضع أفقي مواز لمحور الزمن. وتوخيا للدقة يمكن تحديد مواقع أقصى قيمة لـx من إيجاد مشتقة الإزاحة x بالنسبة للزمن t ومن ثم تطبيق شروط القيم العظمى. وعموما

يكون الاختلاف بين الحالتين من الصغر ما يمكن إهماله. لذلك يمكن اعتبار قيمة السعة في نقطة التماس مساوية لأقصى قيمة للسعة.

3.الحالة الثالثة: وهي تمثل حالة الحركة الحرجة ($r^2=\omega^2$)

أن هذه الحالة الخاصة تمثل الحد الفاصل بين سلوكين مختلفين تماما للمهتز. السلوك الأول هو سلوك اهتزازي ويبدأ عندما تقل قيمة r قليلا عن قيمة ω وهذه الحالة قد تمت دراسته في البند السابق. والسلوك الثاني هو سلوك غير اهتزازي ويحدث عندما تكون قيمة r مساوية أو تزيد عن قيمة ω وفي هذا البند سنحلل الحالة عندما $\omega=r$ وفي البند القادم سنحلل الحالة عندما $\omega<r$. ذا عوضنا $\omega^2=r^2$ في الحل العام المعادلة (7) لمعادلة الحركة نحصل على حدين متماثلين تماما ويكون الحل الناتج كالآتي

$$x = D_1 e^{-rt} + D_2 e^{-rt}$$

$$x = (D_1 + D_2) e^{-rt}$$

$$x = De^{-rt}$$

حيث أن D يساوي (D_1+D_2). أن هذا الحل يحتوي على ثابت اختياري واحد. بينما معادلة الحركة هي من الرتبة الثانية وحلها العام يجب أن يتضمن ثابتين اختياريين لكي يفيا بالشرطين الابتدائيين للحركة. لهذا الغرض سنحاول إيجاد الحل المناسب الذي يحتوي على ثابتين اختياريين لذلك سنلجأ إلى الحالة السابقة (حالة الحركة الناقصة الاضمحلال ونفرض أن معامل الاضمحلال r يزداد تدريجيا حتى يقترب حديا من ω أي أن $(r^2\text{-}\omega^2)^{1/2}$ تقترب من الصفر. فإذا فرضنا أن $(r^2\text{-}\omega^2)^{1/2}=i\delta\omega_o$.حيث أن $\delta\omega_o\rightarrow 0$ فإننا لن نبتعد كثيرا عن شرط هذه الحالة أي أن ($r^2=\omega^2$) وفي أي زمن محدد t ستكون قيمة $\delta\omega_o t$ صغيرة جدا. نعوض ذلك في المعادلة (7) التي تمثل الحل العام فينتج.

$$x = D_1 e^{(-r+i\delta w_o)t} + D_2 e^{(-r-i\delta w_o)t}$$

$$x = e^{-rt}(D_1 e^{\,i\delta w_o t} + D_2 e^{-i\delta w_o t})$$

وبنفس الطريقة التي اتبعناها في الحالة الأولى يمكن إثبات أن

$$D_1 e^{\,i\delta w_o t} + D_2 e^{-i\delta w_o t} = A\cos \delta w_o t + B\sin \delta w_o t$$

حيث أن أن $A=(D_1+D_2)$ و $B=i(D_1\text{-}D_2)$ وبذلك يصبح الحل في هذه الحالة هو

$$x = e^{-rt}(A\cos \delta w_o t + B\sin \delta w_o t) \qquad (20)$$

ولكن $\delta\omega_o t \to 0$ لذلك يمكن إجراء التقريبات التالية بدرجة عالية من الدقة $\sin\delta\omega_o t \approx \delta\omega_o t,\ \cos\delta\omega_o t \approx 1$ نعوض في المعادلة (20) فنجد أن

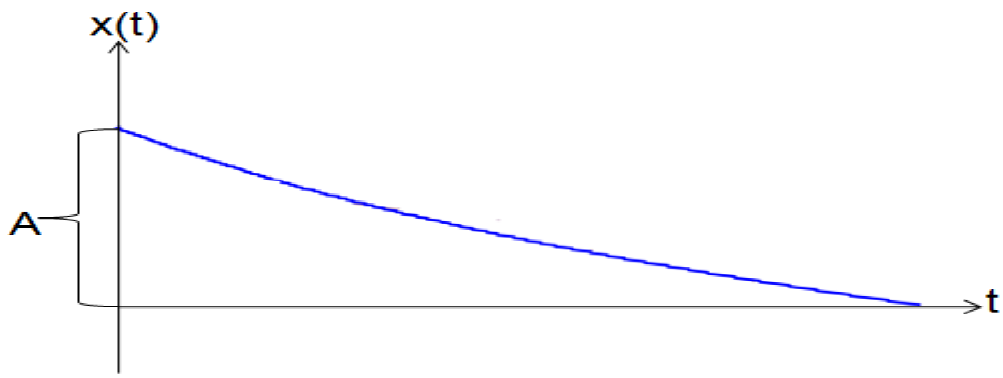
$$x = e^{-rt}(A + B\delta w_o t)$$

فإذا اعتبرنا $\acute{B} = B\delta w_o$ فان الحل العام في هذه الحالة يصبح

$$x = e^{-rt}(A + \acute{B}t) \qquad (21)$$

حيثA, $\acute{B}$ يمثلان ثابتين اختياريين يمكن ايجادهما من الشروط الابتدائية للحركة. ويلاحظ من أن هذا الحل يمثل الحالة الحدية للمعادلة (7) عندما يزداد معامل الاضمحلال r مقتربا من قيمة ω أي عندما يقترب الزمن الدوري T_o للاهتزاز المضمحل من المالانهاية أي $T_o \to \infty$. ويمكن التأكد من صحة هذا الحل التجريبي بتعويضه في معادلة الحركة (3) فنجد أن الطرفين متطابقان.

أن هذا الحل يصف حركة الجسيم في الحالة الحرجة ويمكن تمثيله بيانيا كما مبين في الشكل (5)



الشكل (5) يبين حركة الجسيم في الحالة الحرجة إذا أزيح إزاحة ابتدائية مقدارها A ثم ترك حرا

يلاحظ من هذا الشكل أن الجسيم يعود إلى موضع توازنه الأصلي إذا ترك حرا بعد أزاحته إزاحة ابتدائية مقدارها A وهذا يشير إلى أن الحل لا يصف أي سلوك اهتزازي للجسيم مما يعني أن المقاومة الاحتكاكية كبيرة إلى الحد الذي يمنع حدوث الاهتزاز أي أن $(\omega^2 = r^2)$ أما إذا كانت المقاومة الاحتكاكية بدلالة عامل الاضمحلال r اكبر من ذلك أي أن $(\omega^2 < r^2)$ فان المقاومة الاحتكاكية تصبح اكبر بالمقدار وتمنع أي سلوك اهتزازي للجسيم وتبطئ حركته بشكل يستغرق زمنا أطول للعودة إلى موضع توازنه إذا ما ترك بعد إزاحته عن موضع توازنه وهذه الحالة سيتم دراستها بتفصيل أكثر في البند القادم، أما إذا كانت المقاومة الاحتكاكية بدلالة عامل الاضمحلال r اقل من ذلك أي أن $(\omega^2 > r^2)$ فعندئذ ينتقل المهتز إلى الحالة التي سبق دراستها في البند السابق.

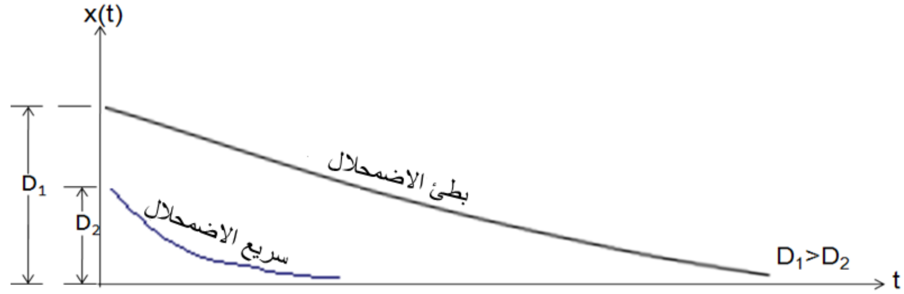
من هذا يتضح أن الحالة الحرجة تعني عودة الجسيم إلى موضع توازنه بأقل فترة زمنية إذا ما أزيح عن موضع توازنه وترك حرا دون أن يصاحب ذلك سلوك اهتزازي. أما إذا أزيح الجسيم عن موضع التوازن فان الجسيم يتجاوز موضع التوازن إلى الجهة الأخرى ثم يعود إلى موضع توازنه بأقل فترة زمنية دون أن يتذبذب. إن لحالة الحركة الحرجة أهمية عملية كبيرة في تصميم أجهزة القياس العملية التي تتضمن أجزاء متحركة كالمؤشرات في أجهزة القياس الكهربائية مثل الكلفانومترات والاميترات والفولتميترات وغيرها. حيث يعاني المؤشر قوة دفع مفاجئة بعد غلق مفتاح الدائرة الكهربائية مباشرة. فإذا لم يكن معامل الاضمحلال مناسبا فان المؤشر أما يهتز حول موضع توازنه إذا كان ($\omega^2>r^2$) أو يتحرك المؤشر ببطء نحو موضع التوازن إذا كانت ($\omega^2<r^2$) وكلا الحالتين غير مرغوب فيها. أما إذا كانت ($\omega^2=r^2$) فان المؤشر يصل نقطة توازنه بسرعة وبدون أن يتذبذب حول تلك النقطة مما يتيح اخذ قراءة صحيحة وسريعة حال ربط جهاز القياس بالدائرة.

4.الحالة الرابعة: وهي تمثل حالة الحركة الزائدة الاضمحلال ($r^2>\omega^2$)

في هذه الحالة يعاني المهتز مقاومة احتكاكية شديدة وتكون قيمة معامل الاضمحلال r كبيرة بالمقارنة مع التردد الزاوي الطبيعي للمهتز ω. مما يعني أن المقدار تحت الجذر $(r^2-\omega^2)^{1/2}$ يكون مقدار حقيقي موجب وبذلك يكون الحل العام للمعادلة (7) لهذه الحالة كالآتي

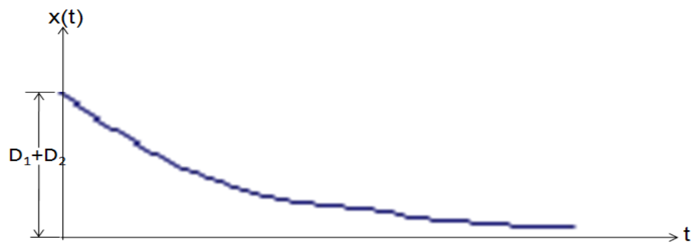
$$x = e^{-rt}\left(D_1 e^{+\sqrt{(r^2-\omega^2)}t} + D_2 e^{-\sqrt{(r^2-\omega^2)}t}\right) \qquad (22)$$

حيث أن D_1 و D_2 يمثلان ثابتين اختياريين يمكن ايجادهما من الشروط الابتدائية للحركة. يلاحظ في هذه المعادلة أنها لا تحتوي على عامل تتذبذب قيمته مع الزمن مما يشير إلى أن المهتز لا يسلك سلوك اهتزازي. أن هذا الحل يتكون من جزئين أولهما يتمثل بالحد الأول الذي يمثل الجزء البطئ الاضمحلال والحد الثاني يمثل الجزء السريع الاضمحلال كما مبين في الشكل (6).



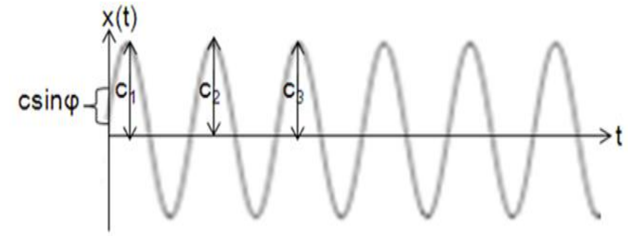
الشكل (6) يبين أن معدل تغير الإزاحة مع الزمن يختلف في الحدين الذي يتكون منهما الحل العام المعادلة (22).

إن الحركة الفعلية للمهتز يمثلها مجموع هذين الجزئين الذي يمكن تمثيله بيانيا كما مبين في الشكل (7). أن هذا الشكل يشير إلى انه لو أزيح الجسيم إزاحة ابتدائية مقدارها (D_1+D_2) في الزمن $t=0$ عن موضع توازنه ثم ترك حرا فان محصلة الإزاحة ستتلاشى بصورة آسية مع مرور الزمن إلى أن يصل الجسيم موضع توازنه في زمن لانهائي الطول أي أن الجسيم سيعود ببطء شديد إلى موضع توازنه بعد فترة زمنية طويلة جدا ويتوقف عن الحركة تماما في ذلك الموضع دون أن يتذبذب. أن هذا يشير إلى أن المقاومة التي يعانيها المهتز كبيرة بحيث لأتسمح بحدوث أي اهتزاز.

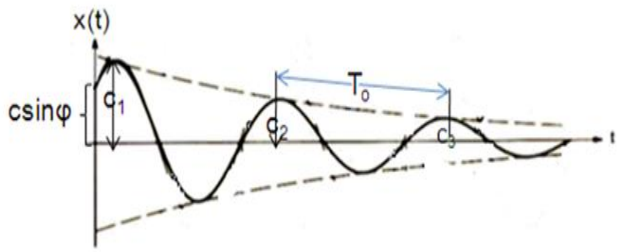


الشكل (7) يبين تغير الإزاحة مع الزمن في المهتز الذي يعاني حركة شديدة الاضمحلال.

س:ملخص النتائج التي حصلت عليها في الحالات الأربع التي تمثل الحالات الخاصة للحل العام لمعادلة الحركة التوافقية المضمحلة كما في الشكل (8)

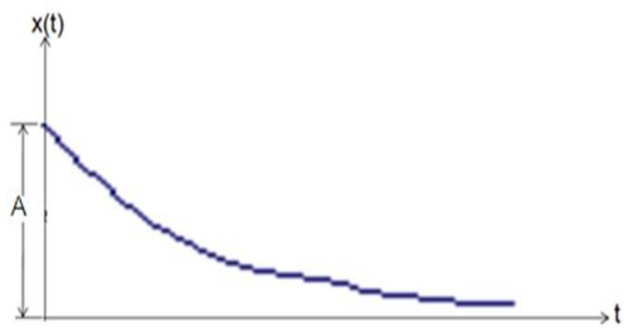


معادلة الحركة (14) الحركة اهتزازية سعة الحركة c ثابت الزمن الدوري T_o ثابت التردد الطبيعي f.

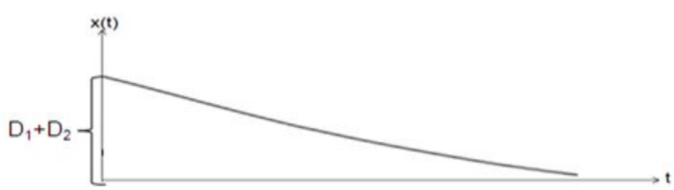


معادلة الحركة (17) الحركة اهتزازية سعة الحركة ce^{-rt} تتناقص مع الزمن.

الزمن الدوري $T<T_o$ التردد $f>f_o$.



معادلة الحركة (21) الحركة غير اهتزازية الجسيم يعود إلى موضع توازنه في اقل زمن ممكن.



معادلة الحركة (22) الحركة غير اهتزازية الجسيم يعود إلى موضع توازنه ببطء في زمن يزيد عن الزمن الذي يستغرقه في الحالة الحرجة.

مثال:مهتز يتألف من جسيم ونابض حلزوني يعاني أثناء اهتزازه على امتداد المحور السيني قوتين القوة الأولى هي قوة الاستعادة ومقدارها يتناسب مع الإزاحة الآنية x والقوة الثانية هي قوة إخماد ومقدارها يتناسب مع السرعة الآنية v. فإذا كانت قوة الاستعادة تساوي عدديا $40xdyne$ وقوة الإخماد تساوي $200dyne$ في اللحظة التي تكون فيها سرعته الآنية $10cm/S$ وإذا فرضنا إن كتلة الجسيم $5g$ وانه قد بدا حركته من السكون عند نقطة تبعد $20cm$ عن موضع التوازن. أوجد ما يلي

1.المعادلة التفاضلية لحركة المهتز والشروط التي تصف حركته.

2.الموضع الآني للجسيم في أي لحظة زمنية.

3.السعة والزمن الدوري والتردد للذبذبات المضمحلة.

4.ارسم الحركة بيانيا.

5.التردد الطبيعي والزمن الدوري الطبيعي للاهتزاز.

الحل

1.بما أن قوة الاستعادة تساوي

$$Fk = -kx = -40x$$

وثابت المقاومة R تساوي

$$R=F_R/v=200dyne/10cm/S=20dyne/cm/S$$

لذلك فان قوة الإخماد أو المقاومة F_R ومقدارها هو

$$F_R=-Rv=-20(dx/dt)$$

وبتطبيق قانون نيوتن الثاني في الحركة فينتج أن

$$\sum F=m(d^2x/dt^2)$$

$$m(d^2x/dt^2)=-R(dx/dt)-kx$$

$$5(d^2x/dt^2)=-20(dx/dt)-40x \qquad (1)$$

أي أن وبقسمة طرفي المعادلة (1) على 5 وبترتيب حدودها نحصل

$$(d^2x/dt^2)+4(dx/dt)+8x=0 \qquad (2)$$

وهذه هي المعادلة التفاضلية لحركة المهتز.

2.لإيجاد الموضع الآني x للجسيم في أية لحظة زمنية t يجب إيجاد الحل لمعادلة الحركة (2). لدينا الشروط الابتدائية للحركة وهي

$x=20$ في اللحظة الزمنية $t=0$

$v=0$ في اللحظة الزمنية $t=0$

نقارن المعادلة (2) مع المعادلة القياسية للحركة التوافقية المضمحلة فنجد أن

$$(d^2x/dt^2)+2r(dx/dt)+\omega^2x=0$$

$$\omega^2=8$$

$$2r=4$$

$$r^2=4$$

وهذا يشير إلى أن قيمة ω^2 اكبر من r^2 $(\omega^2>r^2)$ أي أن الحركة الاهتزازية مضمحلة والحل المناسب هو

$$x=e^{-rt}(A\cos\omega_o t+B\sin\omega_o t) \qquad (3)$$

نعوض القيم المناسبة

$$\omega_o=(\omega^2-r^2)^{1/2}=(8-4)^{1/2}=2$$

$$r=2$$

في المعادلة (3) فتصبح

$$x=e^{-2t}(A\cos 2t+B\sin 2t) \qquad (4)$$

ولإيجاد قيم B,A نعوض الشروط الابتدائية في المعادلة (4) فنجد عند تعويض الشرط الابتدائي الأول أن السعة A تساوي

$$20=1(A+0)$$

$$A=20cm$$

ولتعويض الشرط الثاني يجب أن نفاضل المعادلة (4) بالنسبة للزمن فنحصل على

$$v=dx/dt=-2e^{-2t}(A\cos 2t+B\sin 2t)+e^{-2t}(-2A\sin 2t+2B\cos 2t)$$

$0=-2(A+0)+(0+2B)=-2(20)+(2B)=-40+2B$

$40=2B$

$B=20cm$

وهكذا نجد أن الموضع الآني x للجسيم في أية لحظة زمنية t هو

$x=e^{-2t}(20cos2t+20sin2t)$

ويمكن التعبير عن الحل السابق بطريقة أخرى، فلدينا العلاقة

$Acos2t+Bsin2t=Ccos(2t-\varphi)$

حيث أن

$C=(A^2+B^2)^{1/2}=(20^2+20^2)^{1/2}=20(2)^{1/2}cm$

وان

$tan\varphi=A/B=20/20=1$

$\varphi=arctan(1)=\pi/4$

وعليه يصبح الحل العام كالآتي:

$$x=20(2)^{1/2}e^{-2t}cos(2t-\pi/4) \qquad (5)$$

إن هذه المعادلة تمكننا من إيجاد موضع الجسيم x في أية لحظة زمنية t.

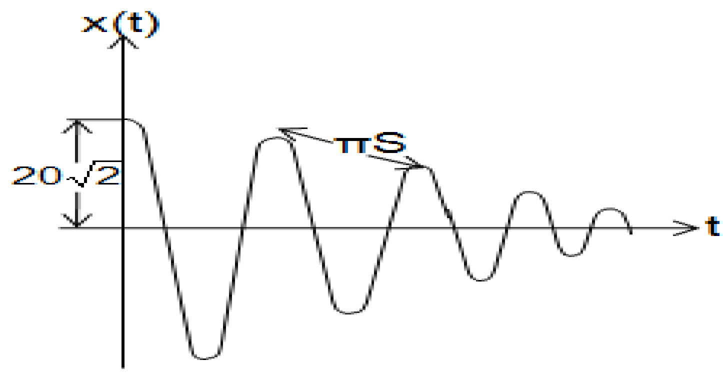
3.**من المعادلة (5) نجد أن السعة، الزمن الدوري والتردد للحركة المضمحلة يساوي**

$C=20(2)^{1/2}e^{-2t}cm$

$T_o=2\pi/\omega_o=2\pi/2=\pi S$

$f_o=\omega_o/2\pi=2/2\pi=1/\pi Hz$

4.إن حركة الجسيم يمكن تمثيلها بيانيا من خلال المعادلة (5) وذلك برسم الإزاحة الآنية x مع الزمن t فنجد من هذا الشكل إن سعة الاهتزاز تتناقص تدريجيا مع الزمن



5. لإيجاد التردد الطبيعي والزمن الدوري في حالة انعدام الإخماد (أو المقاومة) نعوض $t=0$ في المعادلة (3) مع وضع $\omega_o=\omega$ فنحصل على $x=e^{-rt}(A\cos\omega t+B\sin\omega t)$ حيث أن

$\omega^2=k/m$

ومنها نجد أن

$\omega^2=k/m=40/5=8$

$\omega=2(2)^{1/2}$

ومنها نجد الزمن الدوري الطبيعي T والتردد الطبيعي f كالأتي

$\omega=2\pi/T$

$T=2\pi/\omega=2\pi/2(2)^{1/2}=\pi/(2)^{1/2}S$

$f=1/T=(2)^{1/2}/\pi Hz$

سؤال:إن قيمة ثابت الاضمحلال r بالنسبة لقيمة ω هي التي تحدد طبيعة حركة المهتز، اشرح ذلك.

الجواب

1.عندما تكون قيمة r اكبر من قيمة ω لا يحدث اهتزازا وإذا ما أزيح المهتز عن موضع توازنه وترك حرا فانه يعود ببطء إلى موضع توازنه.

2.وإذا كانت قيمة $\omega=r$ تكون الحركة حرجة أي أن هذه القيمة تفصل بين سلوكين هما أما سلوك اهتزازي أو سلوك غير اهتزاز. وفي حالة $\omega=r$ إذا ما أزيح المهتز عن موضع توازنه وترك حرا فانه يعود إلى موضع توازنه بأقل زمن ممكن (دون أن يصاحبه اهتزاز).

3.وعندما تكون قيمة r اقل من من قيمة ω فعندئذ يمكن للمهتز أن يهتز ولكن اهتزازه يكون مضمحل أي أن سعته تقل بالتدريج. وسرعة تناقص السعة يعتمد على قيمة r وفي حالة متطرفة عندما r تنعدم $(r=0)$ فان المهتز يستمر بالاهتزاز وتبقى سعة حركته ثابتة

الفصل الخامس

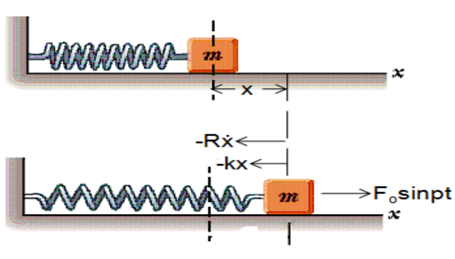
الاهتزاز القسري

مقدمة

لقد اقتصرت دراستنا حتى الآن على دراسة الاهتزاز الحر المضمحل وغير المضمحل حيث وجدنا انه عندما يزاح المهتز غير المضمحل عن موضع توازنه ويترك حرا فانه سوف يهتز بتردد يعتمد على ثوابت المرونة والقصور الذاتي، ومثل هذا التردد يدعى بالتردد الحر أو التردد الطبيعي. إن ما يساعد على استمرار الاهتزاز الحر هو الطاقة المخزونة في المهتز في بداية الحركة الاهتزازية ولكن بسبب المقاومة الاحتكاكية التي يتحتم وجودها دائما مهما كانت صغيرة فان سعة الاهتزاز سوف تتضاءل بالتدريج مع الزمن حتى يتوقف المهتز عن الاهتزاز. ولكي نحافظ على استمرار الاهتزاز يجب أن يزود المهتز بالطاقة باستمرار للتغلب على تأثير المقاومة الاحتكاكية. "وإذا كانت الوسيلة لتزويد المهتز بالطاقة على شكل قوة خارجية دورية فعندئذ يقال للمهتز انه في حالة اهتزاز قسري أو اهتزاز مجبر". ولعل من ابسط الأمثلة المألوفة على الاهتزاز القسري هو حركة الأرجوحة فالأرجوحة المهتزة إذا ما تركت وشانها فإنها سوف تتوقف عن الاهتزاز بعد فترة لن تطول كثيرا وذلك بسبب الفقدان المستمر للطاقة نتيجة الاحتكاك، ولكن إذا ما أعطيت دفعات صغيرة متعاقبة وعلى فترات زمنية مناسبة فإنها سوف تستمر على الاهتزاز نتيجة التعويض المستمر للطاقة المفقودة. وبالحقيقة إذا ما أحسن توقيت الدفعات بحيث تكون مؤثرة بنفس اتجاه الحركة وليس عكسها فان سعة الاهتزاز تكون كبيرة. وهناك أمثلة عملية كثيرة على الاهتزاز القسري، منها اهتزاز الجسر تحت ضربات أقدام طابور عسكري عند العبور واهتزاز هيكل المحرك نتيجة الضربات الدورية للمكابس داخل اسطوانات الاحتراق، واهتزاز الآلات الموسيقية بأنواعها الوترية والهوائية وذات الأغشية الرقيقة عند الإثارة الميكانيكية أو الكهربائية. إن مسالة الاهتزاز القسري هي مسالة عامة في الفيزياء. إذ أن حل هذه المسالة لا يقتصر فائدته على الحركات الاهتزازية والموجية فقط بل يتعداها إلى مجالات أخرى مختلفة في الصوتيات ودوائر التيار المتناوب والفيزياء الذرية.

معادلة الحركة للمهتز المضمحل تحت تأثير قوة خارجية دورية

سنعتبر هنا المهتز المؤلف من جسيم كتلته m متصل بطرف نابض حلزوني ثابت مرونته k ومثبت طرفه الأخر بأحكام كما في الشكل (1).



الشكل (1) مهتز مضمحل تحت تأثير قوة خارجية دورية

نفرض أن الجسيم يهتز في الهواء (أو أي وسط لزج) بسرعة غير عالية بحيث تكون المقاومة الاحتكاكية التي يعانيها الجسيم متناسبة طرديا مع سرعته. ونفرض أن الجسيم يخضع لقوة خارجية دورية F_p مقدارها $F_o sinpt$ حيث p يمثل التردد الزاوي لهذه القوة. وهذا التردد مستقل تماما عن التردد الزاوي الطبيعي ω أو التردد الزاوي المضمحل ω_o. إن هذه القوة الدورية تعمل على تغذية المهتز بالطاقة لتعوض عن الطاقة التي يخسرها خلال الحركة. إن الجسيم المهتز في هذه الحالة يكون خاضعا آنيا لثلاث قوى مختلفة هي قوة الاستعادة $F_k=-kx$ وقوة الاحتكاك $F_R=-R\dot{x}$ والقوة الخارجية الدورية $F_p=F_o sinpt$ ومحصلة هذه القوة المؤثرة في امتداد المحور السيني x هي

$$\sum F = F_p + F_R + F_k \qquad (1)$$

والآن نطبق قانون نيوتن الثاني في الحركة وتعويض قيم القوى المؤثرة على الجسيم المهتز في المعادلة (1)، فينتج أن

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = F_o sinpt - R(\frac{dx}{dt}) - kx \qquad (2)$$

نقسم طرفي المعادلة (2) على m ونرتبها فتصبح

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \frac{R}{m}(\frac{dx}{dt}) + (\frac{k}{m})x = (\frac{F_o}{m})sinpt \qquad (3)$$

ونفرض أن $(f_o=F_o/m)$، ولما كانت $(\omega^2=k/m)$ و $(2r=R/m)$ لذلك تصبح المعادلة (3) كالآتي

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + 2r(\frac{dx}{dt}) + \omega^2 x = f_o sinpt \qquad (4)$$

حل معادلة الحركة القسرية (الحل الخاص)

لحل هذه المعادلة يجب أن نتذكر إن القوة الخارجية المسلطة بتردد زاوي p ستجبر الجسيم على الاهتزاز بهذا التردد، وبذلك فان كل حد من حدود هذه المعادلة في الطرف الأيسر يجب أن يتضمن دالة تتغير توافقيا مع الزمن بتردد زاوي p لهذا الغرض سنفرض الحل التجريبي باعتبار الإزاحة الآنية x تتغير توافقيا مع الزمن وفق المعادلة التالية

$$x = Asinpt + Bcospt \qquad (5)$$

لاختبار صحة هذا الحل نجد dx/dt و d^2x/dt^2 للمعادلة (5) ونعوضه في المعادله (4)

$$\frac{dx}{dt} = pAcospt - pBsinpt$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -p^2Asinpt - p^2Bcospt$$

$$-p^2Asinpt - p^2Bcospt + 2rpAcospt - 2rpBsinpt + \omega^2Asinpt + \omega^2Bcospt = f_osinpt$$

نرتب هذه المعادلة فتصبح

$$(-p^2A - 2rpB + \omega^2A)sinpt + (-p^2B + 2rpA + \omega^2B)cospt = f_osinpt \qquad (6)$$

فإذا كان الحل المفروض صحيحا فان الطرف الأيمن في هذه المعادلة يجب أن يساوي الطرف الأيسر عند أي لحظة زمنية t. وهذا يعني أن معامل $sinpt$ في الطرف الأيسر يجب أن يساوي معامل $sinpt$ في الطرف الأيمن في أية لحظة زمنية t، وكذلك بالنسبة لتساوي معاملي $cospt$ في الطرفين. فبالنسبة لمعاملي $sinpt$ و $cospt$ نجد أن

$$-p^2A - 2rpB + \omega^2A = f_o$$

$$-p^2A - 2rpB + \omega^2A = 0$$

نحل هاتين المعادلتين الآنيتين فنحصل على قيم A و B كالآتي

$$A = \frac{(\omega^2 - p^2)f_o}{(\omega^2 - p^2)^2 + (2rp)^2} \qquad (7)$$

$$B = \frac{-2rpf_o}{(\omega^2 - p^2)^2 + (2rp)^2} \qquad (8)$$

نعوض A و B في الحل المعادلة (5) فنجد أن

$$x = \left[\frac{(\omega^2 - p^2)f_o}{(\omega^2 - p^2)^2} + (2rp)^2\right] sinpt - \left[\frac{2rpf_o}{(\omega^2 - p^2)^2} + (2rp)^2\right] cospt \qquad (9)$$

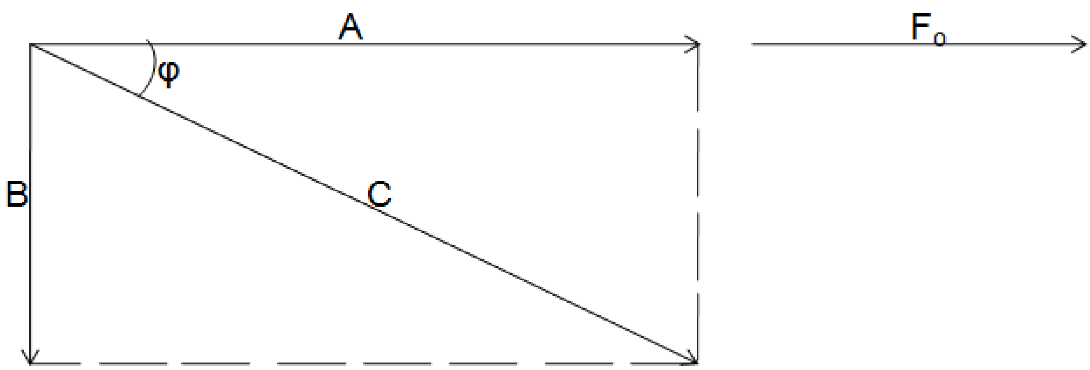
ولأجل التعبير عن هذا الحل بشكل رياضي ابسط وبصورة يسهل التفسير الفيزيائي لسلوك الجسيم المهتز، يفضل استخدام الطريقة الاتجاهية لاختزال الحل. لهذا الغرض لدينا معادلة الإزاحة الآنية x وهي

$$x = Asinpt + Bcospt$$

ولدينا معادلة القوة الخارجية الدورية F_o وهي

$$F = F_o sinpt$$

ومن مقارنة المعادلتين نلاحظ إن متجه القوة F_o بنفس اتجاه مركبة الإزاحة A لان كليهما موجب ومضروب في $sinpt$، لذلك يقال إن كليهما بنفس الطور. ويعبر عن ذلك في الشكل (2)



الشكل (2) يبين زاوية الطور بين متجه القوة المحركة للمهتز ومتجه الإزاحة.

أما مركبة الإزاحة B فهي مضروبة في $cospt$ لذلك فأنها حتما خارج الطور بزاوية 90^o عن القوة F_o. ولكن إشارة B سالبة في المعادلة (8) لذلك فأنها يجب أن تكون متخلفة عن طور F_o بزاوية 90^o. من الشكل (2) يمكن إيجاد محصلة C وزاوية الطور θ. حيث

$$C = \sqrt{(A^2 + B^2)} \qquad (10)$$

$$\tan\theta = \frac{B}{A} \qquad (11)$$

وبذلك تأخذ المعادلة (5) الشكل الآتي

$$x = Csin(pt + \theta) \qquad (12)$$

نعوض قيم A و B من المعادلتين (7) و (8) في المعادلات (10) و (11) فنحصل على

$$C = \frac{f_o}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}} \qquad (13)$$

$$\tan\theta = \frac{-2rp}{(\omega^2 - p^2)} = 2rp/(p2 + \omega2) \qquad (14)$$

$$x = \frac{f_o sin(pt + \theta)}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}} \qquad (15)$$

إن المعادلة الأخيرة (15) تمثل حلا صحيحا لمعادلة الحركة (4) طالما أنها تتفق معها بدون تناقص، وهذا الحل يمثل حل الحالة المستقرة لأنه يستمر على نمط واحد ولا يتغير خلال الزمن. انه يمثل استجابة الجسيم للاهتزاز القسري بتردد زاوي p (تردد القوة الخارجية المثيرة للاهتزاز) من دون اعتبار للشروط الابتدائية للحركة أو للتردد الطبيعي للمهتز. ولذلك فان هذا الحل لا يمثل حلا عاما لمعادلة الحركة لأنه لا يحتوي على ثوابت اختيارية تحددها الشروط الابتدائية لحركة المهتز وهذا الحل يدعى بالحل الخاص.

الحلول المكملة (الحلول العابرة)

إن هناك حلا آخر صحيحا لمعادلة الحركة (4). وهو الحل الناتج من الحركة الحرة للمهتز بدون تأثير قوة خارجية عليه. أي هو حل المعادلة (4) عندما يكون الطرف الأيمن فيها مساويا للصفر. وقد سبق أن وجدنا الحل العام لمثل هذه الحالة وناقشناه بالتفصيل في الفصل الرابع. وقد وجدنا انه في حالة وجود مقاومة احتكاكية وهذا ما هو متوقع في كل الحالات العملية. فان المهتز لا يستمر على الحركة أو الاهتزاز الحر بل يتوقف بعد فترة زمنية. إن المعادلة (5) يكون لها ثلاثة حلول مختلفة عندما يكون الطرف الأيمن فيها مساويا للصفر وكل حل يعتمد على القيم النسبية لمعامل المقاومة r والتردد الطبيعي للمهتز ω. وهذه الحلول تدعى رياضيا بالحلول المكملة (*Complementary solutions*) وهذه الحلول هي:

***1.*عندما $\omega > r$ فان الحل المكمل يكون**

$$x = Ce^{-rt} sin(\omega o t + \theta) \qquad (16)$$

وهذا الحل يمثل حالة الاهتزاز الناقصة الاضمحلال.

2.وعندما $\omega = r$ فان الحل المكمل يكون

$$x = e^{-rt}(A + B/t) \qquad (17)$$

وهذا الحل يمثل حالة الحركة الحرجة.

3.وعندما $\omega<r$ فان الحل المكمل يكون

$$x = e^{-rt}\left(D_1 e^{+\sqrt{(r^2-\omega^2)}t} + D_2 e^{-\sqrt{(r^2-\omega^2)}t}\right) \qquad (19)$$

وهذا الحل يمثل حالة الحركة الزائدة الاضمحلال.

وفي جميع هذه الحلول يلاحظ إن قيمة الإزاحة x تقترب من الصفر مع مرور الزمن t. ولذلك فان مثل هذه الحلول توصف فيزيائيا بالحلول العابرة لأنها تمثل حالات مؤقتة ولا تستمر سوى فترة زمنية قصيرة.

الحلول العامة

ولما كانت معادلة الحركة (5) هي معادلة خطية لذلك يكون حلها العام هو مجموع الحلين الخاص والمكمل. وعلى هذا الأساس يكون هناك ثلاثة حلول عامة كاملة للمعادلة (5) وكل حل يعتمد على القيم النسبية لـr و ω.

1.**عندما $\omega>r$ فان الحل الكامل يكون**

$$x = \frac{Ce^{-rt}sin(\omega_o t+\theta) + f_o sin(pt+\theta)}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+(2rp)^2}} \qquad (20)$$

2.**وعندما $\omega=r$ فان الحل العام الكامل يكون**

$$x = \frac{e^{-rt}(\frac{A+B}{t}) + f_o sin(pt+\theta)}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+(2rp)^2}} \qquad (21)$$

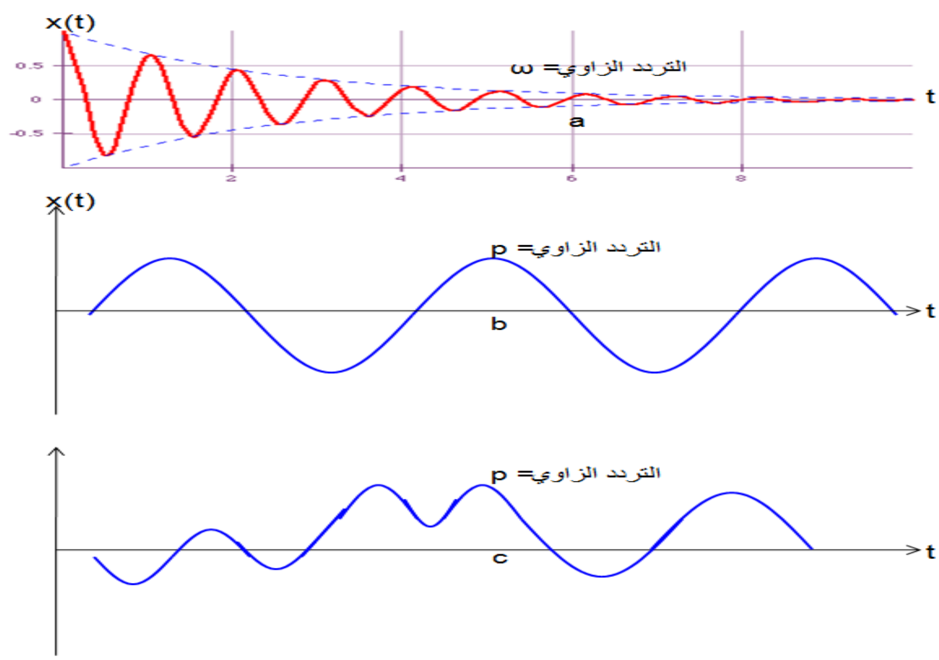
3.**وعندما $\omega<r$ فان الحل العام الكامل يكون**

$$x = e^{-rt}\left(D_1 e^{+\sqrt{(r^2-\omega^2)}t} + D_2 e^{-\sqrt{(r^2-\omega^2)}t}\right) + \frac{f_o sin(pt+\theta)}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+(2rp)^2}} \qquad (22)$$

ويلاحظ إن كل حل من هذه الحلول العامة يتألف من حدين، الحد الأول يدعى رياضيا بالحل المكمل ويمثل فيزيائيا الجزء العابر من الحل العام، والحد الثاني يدعى رياضيا بالحل الخاص ويمثل فيزيائيا الجزء المستقر من الحل العام.

والحل العام الكامل المقابل لهذه الحالة يمكن تمثيله بيانيا كما مبين في الشكل (3). حيث الجزء (a) يقابل الحد الأول من الحل وهو يمثل حالة الاهتزاز الحر المضمحل ويلاحظ انه يتلاشى بعد فترة زمنية قصيرة ولذلك فان هذا الجزء من الحل يمثل حالة عابرة. والجزء (b) من الشكل يقابل الحد الثاني من الحل ويلاحظ انه يستمر بالاهتزاز بنفس السعة ولا يتغير مع مرور الزمن طالما كانت القوة الدورية المسلطة على المهتز مستمرة في تأثيرها، ولذلك يدعى هذا الجزء بحل الحالة المستقرة. والجزء (c) يمثل محصلة جمع الحلين العابر والمستقر، ويلاحظ فيه إن تأثير الجزء العابر ظاهرة لفترة قصيرة من بدء الاهتزاز ثم بعد ذلك يختفي نهائيا ويبقى الجزء المستقر من الحل هو الطاغي في تأثيره على المهتز.

وفي دراسة الاهتزاز القسري يهمل عادة الجزء العابر من الحل العام بعد مرور فترة زمنية قصيرة من بدء الاهتزاز، ويتركز الاهتمام بعد ذلك على حل الحالة المستقرة الذي يتحكم تماما بسلوك المهتز.



الشكل (3) حلول معادلة الحركة الاهتزازية القسرية (a) يمثل الحل العابر (b) حل الحالة المستقرة (c) الحل التام الناتج من تراكب الحلين (a) و (b).

الرنين: Resonance

عندما تؤثر قوة خارجية ترددها الزاوي p على مهتز تردده الزاوي الطبيعي غير المضمحل ω فان الرنين يحدث: عندما يتساوى تردد القوة المثيرة p مع التردد الطبيعي للمهتز ω. وتوخيا للدقة فان هذا التعريف للرنين غير دقيق تماما إلا تحت شروط نظرية بحتة لكون المهتز يعاني دائما قوى احتكاكية وبذلك يجب اخذ عامل الاضمحلال بالاعتبار. ومن اجل دراسة مفصلة للرنين سنحلل الحل الخاص للمعادلة (4) بطريقة وصفية للوصول إلى التعريف العلمي المناسب للرنين. إن الحل الخاص الذي يمثل الحالة المستقرة للاهتزاز القسري هو

$$x = \frac{f_o sin(pt+\theta)}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+(2rp)^2}} \qquad (23)$$

حيث أن $f_o/\{(\omega^2-p^2)^2+(2rp)^2\}^{1/2}$ يمثل سعة الاهتزاز القسري وسنرمز له بالحرف A لذلك فان

$$A = \frac{f_o}{\sqrt{(\omega^2-p^2)^2+(2rp)^2}} \qquad (24)$$

وعليه تصبح المعادلة (23) كالآتي

$$x = Asin(pt+\theta) \qquad (25)$$

يلاحظ من المعادلة (25) أن المهتز يهتز بتردد قسري p (وهو تردد القوة الخارجية الدورية) وليس بتردده الطبيعي ω. كما أن الحركة الناتجة هي حركة توافقية غير مضمحلة.

كما نلاحظ من المعادلة (24) أن سعة الاهتزاز A تعتمد عل قيمة كل من التردد الطبيعي غير المضمحل ω والتردد القسري للقوة المؤثرة p في اعتبار إن f_o و r ثوابت. فإذا اختلف التردد القسري p اختلافا كبيرا عن التردد الطبيعي ω فان سعة الحركة الناتجة A تكون صغيرة وكلما اقترب تردد القوة الخارجية المؤثرة p من التردد الطبيعي غير المضمحل ω فان سعة الحركة الناتجة A تزداد. وتصل السعة A إلى ذروتها عندما تتساوى قيمة التردد القسري P مع التردد الطبيعي ω. وتعرف هذه الظاهرة باسم الرنين. كما يعرف التردد القسري P الذي يقابل الذروة في سعة الاهتزاز القسري للمهتز باسم تردد الرنين. وتتوقف قيمة السعة A على معامل الاضمحلال r الذي يقيس مقدار قوة الاحتكاك التي يعانيها المهتز. فإذا عوضنا في المعادلة (24) بقيمة $p=\omega$ عندما $r=0$ فان قيمة السعة A تصبح لانهائية في الكبر. وهذه الحالة تقابل انعدام الاضمحلال تماما أي عدم وجود قوة احتكاكية. وهذه الحالة لا تتحقق عمليا إذ لابد أن يكون دائما هناك قوى احتكاكية، وبالتالي فان السعة تصل إلى قيمة كبيرة ولكن محدودة. ولإيجاد قيمة التردد الذي عنده تصبح قيمة السعة في ذروتها يجب أن

نفاضل السعة A بالنسبة لـp ثم نساوي النتيجة للصفر وبعدها نحسب قيمة p التي عندها نحصل على أقصى قيمة للسعة A فلدينا من المعادلة (24) بفرض أن

$$y = (\omega^2 - p^2)^2 + (2rp)^2$$

نعوض هذه النتيجة في المعادلة (24) فنحصل على

$$A = \frac{fo}{\sqrt{y}} \qquad (26)$$

أن أقصى قيمة لـA تحدث عندما تكون قيمة y في نهايتها الصغرى. إن قيمة y تكون في نهايتها الصغرى أو الكبرى عندما

$$\frac{dy}{dp} = -4p(\omega^2 - p^2) + 8r^2 p = 0 \qquad (27)$$

أو

$$p(p^2 - \omega^2 + 2r^2) = 0 \qquad (28)$$

من المعادلة (28) نجد قيم p أما تكون $p=0$ أو تكون $p=(\omega^2-2r^2)^{1/2}$، الآن نفاضل ثانية فنجد أن

$$\frac{d^2y}{dp^2} = -4\omega^2 + 12p^2 + 8r^2 \qquad (29)$$

فعندما نعوض $p=0$ نحصل على

$$\frac{d^2y}{dp^2} = -4(\omega^2 - 2r^2) < 0 \qquad (30)$$

وعندما نعوض $p=(\omega^2-2r^2)^{1/2}$ نحصل على

$$\frac{d^2y}{dp^2} = 8(\omega^2 - 2r^2) > 0 \qquad (31)$$

وعليه فان $p=(\omega^2-2r^2)^{1/2}$ تعطي قيمة النهاية الصغرى لـy. وعندما تكون قيمة y في نهايتها الصغرى فان قيمة السعة A يجب أن تكون في نهايتها العظمى، وعليه فان قيمة التردد القسري p الذي يقود إلى أقصى قيمة لسعة الاهتزاز A هو

$$p = p_r = \sqrt{\omega^2 - 2r^2} \qquad (32)$$

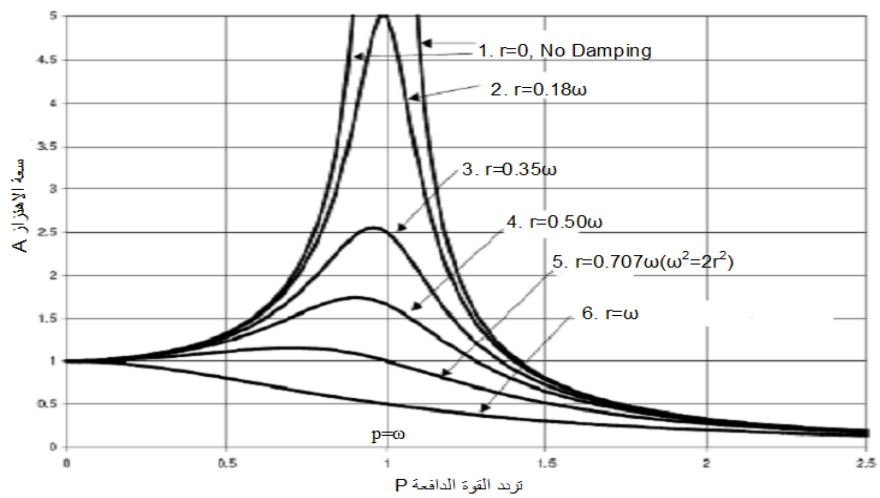
بتربيع طرفي المعادلة (32) نحصل على

$$p^2 = p_r^2 = (\omega^2 - 2r^2) \qquad (33)$$

هذه المعادلة (33) تعطي قيمة تردد الرنين p_r ويلاحظ أن هذا التردد يكون دائما اقل من قيمة التردد الطبيعي ω ويلاحظ انه إذا كانت قيمة معامل الاضمحلال $\omega>r$ وقيمة r اقل من 1 فان قيمة r^2 تزداد صغرا وبذلك فان $\omega^2>>r^2$ وعندئذ يكون شرط حدوث الرنين هو $p=\omega$ مقبولا بدرجة عالية من الدقة. أما إذا كانت قيمة r كبيرة فان قيمة $2r^2$ لا يمكن إهمالها إطلاقا في المعادلة (33). وباستخدام المعادلة (24) يمكن رسم العلاقة البيانية بين السعة A والتردد القسري p لمختلف القيم لمعامل الاضمحلال r وكما هو مبين في الشكل (4). المنحني (1) يوضح أن السعة تصبح مالانهاية في الكبر عندما $r=0$ أي في حالة انعدام الاضمحلال وهذا يحدث عندما p تساوي تماما ω وهذه الحالة النظرية لا تتحقق عمليا لان المهتز سيتحطم تماما. إذا ما انعدم الاضمحلال وأصبحت السعة مالانهاية. ولو فرضنا جدلا أن المهتز لم يتحطم فان سعته الهائلة تعني حتما تجاوزه لحدود المرونة وبالتالي عدم خضوع المهتز لقانون هوك. ولهذا السبب ذكرنا في بداية الفصل أن التعريف الدقيق للرنين يجب أن يأخذ بالاعتبار عامل الاضمحلال.

توضح المنحنيات الثلاثة (2) و (3) و (4) اختلاف سعة الاهتزاز مع اختلاف قيم معامل الاضمحلال r فعندما تكون قيمة r واطئة فان الرنين يحدث بالقرب من ω وعندما تزداد قيمة r فان موقع الذروة (القمة) يزحف إلى اليسار. وهذا يشير إلى أن تردد الرنين لنفس المهتز يختلف باختلاف قيمة r. ويتحكم بقيمة تردد الرنين p المعادلة (33). وهكذا نرى أن الرنين يحدث عمليا عندما يقترب التردد القسري من التردد الطبيعي غير المضمحل للمهتز ω وتصل سعة الاهتزاز إلى ذروتها. حيث في هذه الحالة تصل فعالية القوة المثيرة في إمداد المهتز بالطاقة إلى أقصاها. وفي هذه الحالة يقال أن القوة المؤثرة في حالة رنين مع المهتز. وللأغراض العملية يمكن اعتبار أن الرنين يحدث عند أو بالقرب من ω. أن المنحني (5) في الشكل (4) الذي يقابل معامل الاضمحلال $r=0.707\omega$ (أو $\omega^2=2r^2$)، يمثل خط الانتقال بين حالتين: فوق هذا الخط عندما تكون قيمة r اصغر من 0.707ω فان المنحنيات الناتجة يكون لها نهايات عظمى وتحت هذا الخط عندما تكون قيمة r اكبر من 0.707ω فان المنحنيات الناتجة لا يوجد فيها نهايات عظمى حقيقية. وعلية فان المنحنيات التي تقع فوق المنحني (5) يقابل كل منها حالة رنين ماعدا الحالة عندما $r=0$ والمنحنيات التي تقع تحت المنحني (5) لا يمكن ملاحظة أي اثر للرنين فيها. وهذا متوقع لأنه عند تعويض $\omega^2=2r^2$ في المعادلة (33) فان تردد الرنين الناتج يساوي صفرا. المنحني (6) في الشكل (4) الذي يقابل معامل الاضمحلال $r=\omega$ يقع تحت خط الانتقال (5) لذلك فلا يلاحظ أي ذروة مما يشير إلى عدم حدوث رنين يذكر ومن هذا المنحني يمكن إيجاد سعة الاهتزاز القسري في حالة الاضمحلال الزائد. ويكون التردد الطبيعي المضمحل ω_o اقل من التردد الطبيعي غير المضمحل ω للمهتز. ويلاحظ أن تردد الرنين p لا يتساوى مع كل من التردد الطبيعي غير المضمحل ω

والتردد الطبيعي المضمحل ω_o. ولكنه يكون اصغر من كليهما. وإذا كانت القوى الاحتكاكية التي يعانيها المهتز صغيرة فان الفروق تكون صغيرة. بحيث يمكن اعتبار تردد الرنين p مساويا للتردد الطبيعي ω ويكون الخطأ من الصغر بحيث يمكن إهماله.



الشكل (4) يوضح ستة منحنيات لست درجات من الاضمحلال 1.انعدام الاضمحلال. 2.ناقص الاضمحلال. 6.حرج الاضمحلال.

سعة الاهتزاز عند الرنين

من الواضح من الشكل (4) السابق إن أقصى قيمة للسعة A عند الرنين هي دالة لمعامل الاضمحلال r. والقيمة المضبوطة لسعة الاهتزاز في هذه الحالة يمكن إيجادها بتعويض تردد الرنين p المعطى في المعادلة (33) في المعادلة (24) فعندئذ نحصل على أقصى قيمة للسعة A_{max} أي عند تردد الرنين فان

$$A_{max} = \frac{f_o}{2r\sqrt{\omega^2 - r^2}} \qquad (34)$$

يلاحظ من هذه المعادلة (34) إن السعة في حالة الرنين تعتمد بشكل واضح على معامل الاضمحلال r فإذا كانت قيمة هذا المعامل صغيرة اقل من 1 فان قيمة r^2 عندئذ يمكن إهمالها بالمقارنة مع ω^2. وبذلك تصبح المعادلة (34) كالآتي

$$A_{max} = \frac{f_o}{2rw} \qquad (35)$$

لكن $2r=R/m$ و $f_o=F_o/m$ لذلك فان

$$A_{max} = \frac{F_o}{R\omega} \quad (36)$$

المعادلة (36) تشير إلى انه عندما تكون المقاومة الاحتكاكية التي يعانيها المهتز صغيرة، فان سعة الاهتزاز عند الرنين تتناسب عكسيا مع ثابت المقاومة R. وتصبح السعة كبيرة جدا عندما تقترب قيمة R من الصفر. وهكذا نلاحظ انه عندما يحدث الرنين فان سعة الاهتزاز تزداد بدون حدود ويتحكم بها فقط مقدار المقاومة الاحتكاكية التي يعانيها المهتز. وهكذا نتوقع انه كلما ازدادت المقاومة الاحتكاكية في مهتز، كلما قلت حدة الاهتزاز الرنيني الناجم عن استثارة خارجية معينة.

أمثلة عملية على الرنين

لقد وجدنا فيما سبق أن استجابة أي مهتز لتأثير قوة خارجية دورية يتوقف على العلاقة بين تردد القوة المؤثرة والتردد الطبيعي للمهتز. والمهتز قد يكون بسيطا جدا فيكون له تردد طبيعي واحد أو قد يكون معقدا فيكون له ترددات طبيعية كثيرة. وإذا ما أثرت قوة دورية لها تردد محدد على مهتز فأنها تسبب اهتزازه بنفس ترددها، ومتى ما اقترب أو انطبق تردد هذه القوة على احد الترددات الطبيعية للمهتز فان الرنين يحدث ويصبح الاهتزاز عنيفا. وقد ينتج من دفعات صغيرة متوالية قد أحسن توقيتها على مهتز، اهتزازا رنينيا خطيرا، بينما الأمر قد لا يكون كذلك إذا ما استخدمت دفعات كبيرة متعاقبة لم يحسن توقيتها، ومن هذا يتضح انه لكي يكون الرنين فعالا يجب أن يتوفر شرطان أساسيان: أولا يجب أن يكون تردد القوة المثيرة للاهتزاز مساويا لتردد المهتز، وثانيا، يجب أن يكون طور القوة المؤثرة متفقا مع طور الحركة للمهتز. إن أهمية الاهتزاز القسري تظهر عندما يحدث الرنين، وعلى الرغم من الفوائد العملية العديدة لظاهرة الرنين إلا أن هذه الظاهرة لا تخلو من الجوانب غير المرغوبة التي قد تؤدي إلى كوارث. ولتجنب التأثيرات غير المرغوبة للرنين، يجب معرفة التردد الطبيعي للمهتز واتخاذ الإجراءات المناسبة لتجنب الرنين. وبالنظر لأهمية ظاهرة الرنين سنأتي على ذكر بعض الأمثلة العملية البسيطة والمتباينة لنقف على مدى اثر هذه الظاهرة:

1.رنين عمود الهواء

نمسك شوكة رنانة مهتزة فوق فوهة أنبوبة زجاجية مملوء جزئيا بالماء. ويحدث هذا اهتزازا قسريا في عمود الهواء فوق سطح الماء. ويمكن عن طريق ضبط مستوى سطح الماء أن نجعل التردد الطبيعي لعمود الهواء داخل الأنبوبة مساويا لتردد القوة المثيرة للاهتزاز(أي تردد الشوكة الرنانة) وعندما يحدث هذا فان فاعلية الشوكة المهتزة في إمداد الهواء بالطاقة الاهتزازية تصل إلى أقصاها. وعندئذ سنسمع رنينا قويا في الهواء الموجود بالأنبوبة استجابة للصوت الصادر من الشوكة الرنانة. إن ما يحدث فعلا في هذه الحالة هو أن الموجة الصوتية المنبعثة من الشوكة المهتزة تتحرك في العمود الهوائي داخل الأنبوبة وعندما تصل نهاية العمود تنعكس لتعود إلى موضع الشوكة المهتزة حيث تنعكس مرة أخرى بعد تقويتها إلى الأسفل وهكذا فان الشوكة المهتزة سوف تقوي الموجة الصوتية المنعكسة باستمرار وبذلك يستمر الرنين. ولا يقتصر حدوث الرنين في

هذه الحالة على ارتفاع معين لعمود الهواء بل يحدث أيضا عند ارتفاعات مختلفة تساوي مضاعفات طول عمود الهواء الذي حصل فيه الرنين الأول.

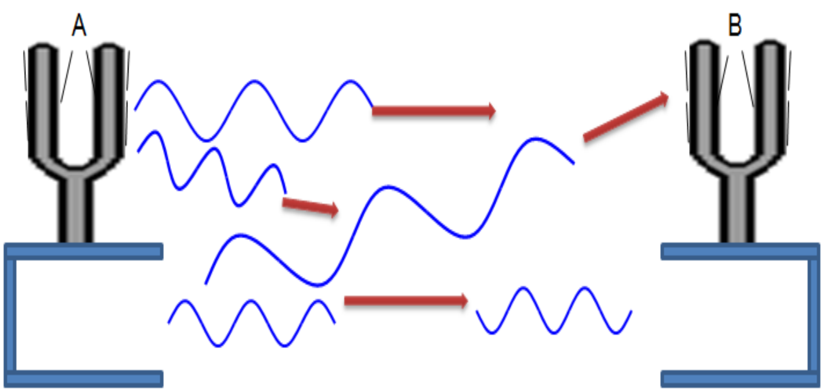
2.رنين الأرجوحة

عندما يسلط طفل دفعات دورية متتالية على أرجوحة ليهزها، فانه يعلم أيضا انه يجب أن يعطي الدفعات على فترات زمنية ، وبذلك فان سعة الاهتزاز تزداد تدريجيا وعندما يتطابق تردد الدفعات التي يسلطها الطفل على الأرجوحة مع التردد الطبيعي للأرجوحة فان الرنين يحدث وبذلك تكون سعة التأرجح كبيرة نسبيا. ويجب أن نتذكر انه ليس المهم فقط أن يتساوى الترددين ليحدث الرنين بل يجب أيضا أن تتفق الحركتان الاهتزازيتان بالطور ليكون كفاءة انتقال الطاقة من احد المهتزين إلى الآخر في أعلى مداه.

3.رنين الشوكتين

نأخذ شوكتين رنانتين لهما نفس التردد ونثبتهما على صندوقين متماثلين موضوعين على مسافة من بعضهما وجوانبهم المفتوحة متقابلة كما في الشكل (5). فعند طرق إحدى الشوكتين A بمضرب من المطاط فإنها سوف تبدأ بالاهتزاز ومنها ينتقل الاهتزاز إلى الصندوق الذي يحملها وهذا بدوره يؤدي إلى اهتزاز الهواء بداخله قسريا فإذا كان طول عمود الهواء داخل الصندوق مساويا لربع طول موجة الصوت الذي تصدره الشوكة الرنانة المهتزة فان رنينا قويا سوف يحدث مما يؤدي إلى انبعاث موجات صوتية قوية من فوهة الصندوق. هذه الموجات عندما تسقط على الشوكة الثانية B سوف تحفزها على الاهتزاز.

إن اهتزاز الشوكة الثانية بدون طرقها أو لمسها سببه هو أن الموجات الصوتية الصادرة من A هي عبارة عن سلسلة من نبضات مؤلفة من تضاغطات وتخلخلات بعد انتقالها في الهواء تصل B. فجزء منها يضرب الشوكة B مباشرة فيثير الاهتزاز فيها وجزء يسقط على الصندوق B فيسبب اهتزاز الهواء بداخله مما يؤدي إلى اهتزاز الصندوق قسريا وهذا الاهتزاز القسري ينتقل إلى الشوكة B فيشتد اهتزازها. ولما كان تردد الموجات الساقطة مساويا لتردد الشوكة B فان هذه الشوكة سوف تهتز بنفس ترددها نتيجة الرنين. ويمكن توضيح ذلك بإسكات الشوكة الأولى بمسكها باليد، والإصغاء للشوكة الثانية التي تستمر في بعث الصوت.



الشكل (5) الشوكة B تستجيب لحركة الشوكة A.

4.الجسور المعلقة

الجسر المعلق هو عبارة عن مهتز معقد من السهل هزه بسبب صغر عوامل الاضمحلال فيه نوعا ما. فإذا سار طابور من الجند على جسر معلق بخطوات منتظمة، فان ضربات الأقدام المتتالية التي تدك الجسر بنفس الطور وعلى فترات زمنية منتظمة تعمل عمل قوة دورية مؤثرة على الجسر. فإذا ما انطبق وقع سير الجند مع احد الترددات الطبيعية للجسر فان رنينا عنيفا يحدث وقد تكون سعة الاهتزاز في هذه الحالة من الكبر مما يؤدي إلى انهيار الجسر. وقد حدث فعلا إن كان الرنين سببا في تحطيم جسور عديدة. ولهذا السبب يؤمر الجند حتى وان كانوا جماعة صغيرة بالتخلي عن نظام سيرهم العسكري عند عبورهم الجسر تلافيا للكوارث. وهناك أمثلة عديدة على الماسي التي أحدثها الرنين في الجسور المعلقة. لقد تحطم جسر برتون المعلق فوق نهر ايرويل بمدينة مانجستر البريطانية تحت وقع أقدام طابور عسكري مؤلف من ستين رجلا فقط.

إلا أن اكبر مأساة وقعت عام 1850 حين دمرت كتيبة من المشاة الفرنسيين قوامها حوالي خمسمائة رجل جسر أنجير المعلق. ولقد هوى الجنود في واد سحيق وقتل منهم 226. وقبل سنين قليلة فقط انهار جسر معلق في حدائق القناطر الخيرية في مصر بسبب تأرجح بعض الأفراد فوقه بتردد انطبق على احد تردداته الطبيعية مما أدى إلى تحطيمه تماما. ولعل من اشهر الاهتزازات الرنينية هو ما حدث لجسر مضايق تاكوما بولاية واشنطن الأمريكية الذي يعد الجسر الثالث في ترتيبه العالمي من حيث الطول. هذا الاهتزاز أدى إلى انهياره ولم يمض على افتتاحه سوى أربعة اشهر فقط. ولم يكن سبب الانهيار مفهوما في حينه (1940). لان الاهتزازات التي تسببها الرياح على الجسور المعلقة لم تكن محط اهتمام المصممين. لقد تعرض جسر تاكوما لرياح مطردة جعلته يتذبذب قسريا، وعندما تطابق تردد القوة المتذبذبة التي أحدثتها الرياح المنتظمة مع احد الترددات الطبيعية لهذا الجسر، تسبب ذلك في زيادة سعة اهتزازه فتحطم. لقد جذبت كارثة جسر تاكوما قدرا كبيرا من الاهتمام لتجنب تكرر وقوعها. وبعد دراسات وبحوث مستفيضة أعيد بناء الجسر كما أعيد تصميم كثير من الجسور حتى تكون مستقرة من وجهة نظر ديناميك الهواء.

مثال: كتلة مقدارها $2kg$ مربوطة بنابض، أعطيت قوة خارجية مقدارها $F=(3N)\cos(2\pi t)$ إذا كان ثابت القوة للنابض $20N/m$ أوجد:

1. زمن الاهتزاز.
2. سعة الحركة بفرض عدم وجود إضمحلال للحركة.

$1. T=(2\pi/\omega)=(2\pi/2\pi)=1S$

$2.\ 2r=0$ (لعدم وجود اضمحلال)

$A=f_o/\{(\omega^2-p^2)^2+(2rp)^2\}^{1/2}=(F/m)(1/\{(\omega^2-p^2)^2+(0)^2\}^{1/2})$

$p=(k/m)^{1/2}=(20/2)^{1/2}=3.16rad/S$

$A=(3/2)((4\pi^2)-(3.16)^2)^{-1}=0.509m=5.09cm$